物理数学0

水田孝信著

目次

I 微分積分

1 テイラー展開

$f(x)$ が何回も微分できるとする。この $f(x)$ を

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

と表わしてみよう。このとき, $c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots$ はどうなるかな?

上の式に $x=0$ を代入してみる

$$f(0) = c_0$$

これで一つ決まった。

1回微分して $x=0$ を代入

$$f'(0) = c_1$$

2回微分して $x=0$ を代入

$$f''(0) = 2c_2$$

n回だと

$$f^{(n)}(0) = n!\,c_n$$

ゆえん

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

これを マクローリン級数。拡張した

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

をテイラー級数 と呼ぼう。

これを使えば e^x, $\sin x$なども$1, x, x^2, x^3, \cdots$ などの足し算で表すことができる。マクローリン級数を使うと

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

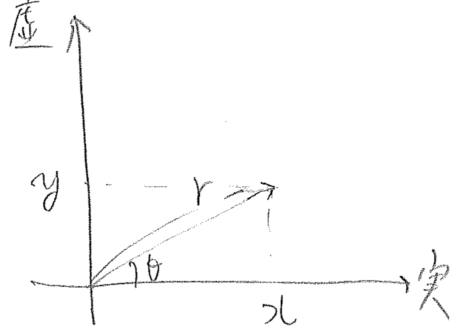
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

とあらわされる。こんなことするとよけいわかりにくいと思うかもしれないが、右辺は中学生でも知ってるようなものの足し算になっている。中学生にとっては $\sin x$, $\cos x$ は未知なる関数であろう。同様, 我々にとってもよくわからない関数 $f(x)$ をよく知ってるものの和にすることは大事なことだ。(Ⅳでくわしくのべよう)
たとえば e^xは知っていて、想像できるとしても e^{ix}はよくわからないかもしれない
そんなとき

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

となりよくわかる形となる。

ちなみに



$z = x + iy$ を極座標で表したくなったとき

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$
$$= r\{\cos\theta + i\sin\theta\} = re^{i\theta}$$

となり，計算しやすそうだ。

2 偏微分・全微分

そもそも $f(x)$ の微分 $\frac{df(x)}{dx}$ は

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

であった。ここで f が x だけでなく「y にもよる」としたらどうしよう？
$f(x,y)$ を微分したい y を固定したとき

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

x を固定したとき

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

とし，これを偏微分としよう。
lim はわずらわしいので

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+dx,y) - f(x,y)}{dx}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x,y+dy) - f(x,y)}{dy}$$

と書くことにしよう。dx, dy は無限小，つまり無限に小さいが 0 でない数である—
つまり $dx \neq 0, dx^2 = 0$，$dx \to 0$ である。dx は 0 でないが 0 にメッチャ近い。
ところで，$f(x,y)$ の x,y を両方少しうごかしたい!! そこで f の微小変化を df
と書くことにしよう。

$y \to y+dy$

$$\begin{aligned} df &= f(x+dx, y+dy) - f(x,y) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + f(x, y+dy)\right) - f(x,y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \end{aligned}$$

これを全微分と呼ぼう。

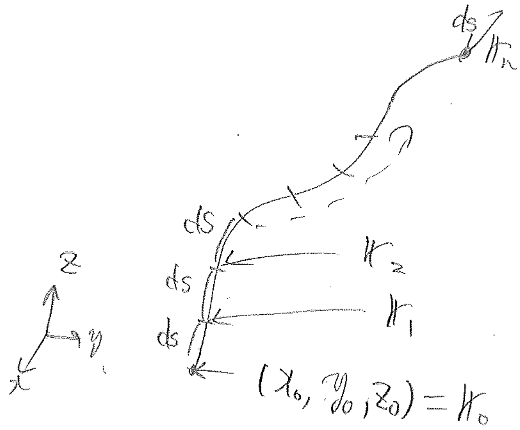
fが3つの変数のときも $f(x,y,z)$ は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

変数がふえても同じだ

3 積分

・線積分



右図のように $f(x,y,z)$，3変数関数を考える。これをベクトル $r=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ として

$f(r)$ と書くことにしよう。

空間に曲線をえがき無限小長さ ds で区切る。

この直線上の点 $r_0, r_1, \cdots r_n$ を考える。これらの点は ds おきにあるとする。

このとき

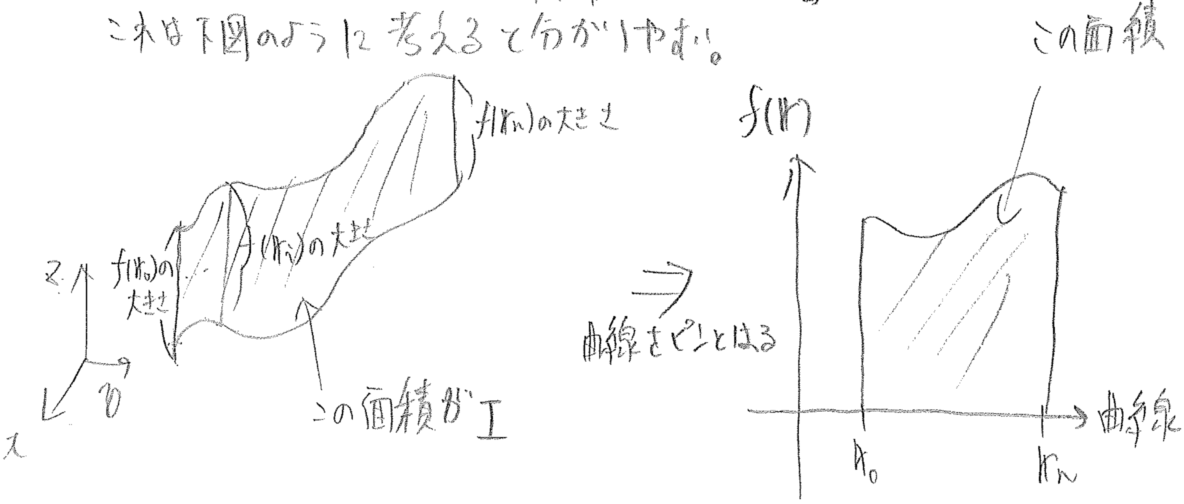
$$I=\sum_{i=0}^{n} f(r)\,ds$$

を考える。dsが無限小だという意味をこめて

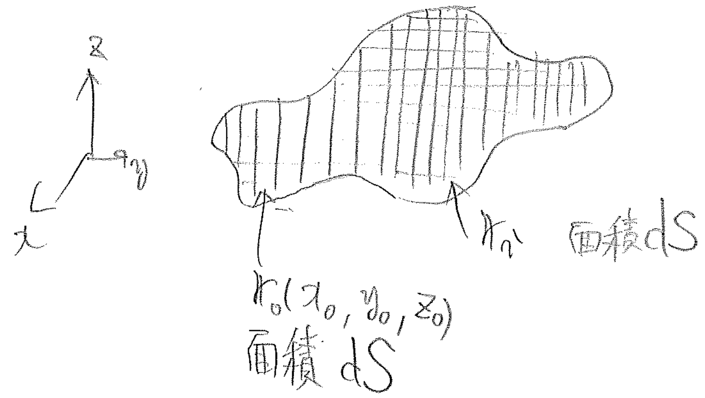
$$I=\int_{r_0}^{r_n} f(r)\,ds$$

と書くことにしよう。これを線積分といおう。

これは下図のように考えると分かりやすい。



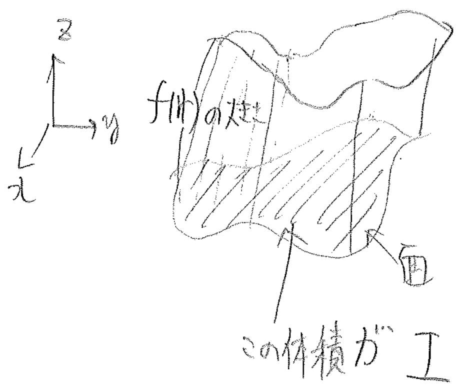
・面積分



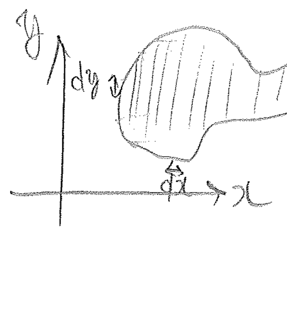
さっきの曲線を曲面に拡張しよう。すると

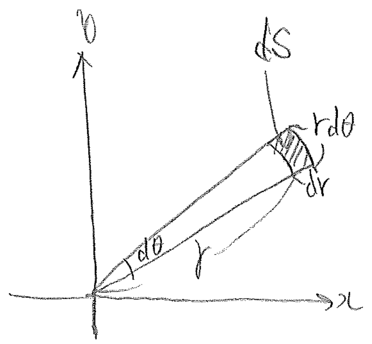
$$I = \sum_{i=0}^{n} f(r_i)\, dS = \iint_{面全部} f(r)\, dS$$

と書くことにしよう。これを面積分という。「面全部」をかっこつけてSとか∂Vとかかく人もいる。(∂Vは立体Vをかこむ面という意味がある)
これも下図のよう考えると分かりやすいかも。



特に2次元の場合 $dS = dx\,dy$ と書けるだろう。無限小面を正方形にとればよいのである。この $dx\,dy$ を極座標で表わしてみよう。



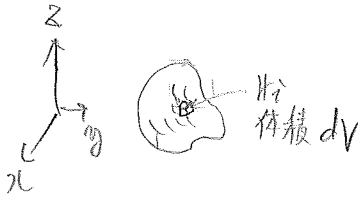


上図のように dS の面積は dr と $rd\theta$ の積となる
ゆえに $dS = r\,dr\,d\theta$ である

・体積分

さらに体積に拡張する。

$$I = \sum_{i=0}^{n} f(r_i)\, dV = \iiint_{体全部} f(r)\, dV$$



これはたとえば $f(r)$ が密度 $[kg/m^3]$ を示すとし $\rho(r)$ としよう。

無限小体積の重さは $dV[m^3]$ が体積なので

$$\rho(r)\, dV$$

となる。

これを重さをもとめたい立体のいたるところの無限小立体の重さの和をとれば

すなわち

$$M = \iiint_{体全部} \rho(r)\, dV$$

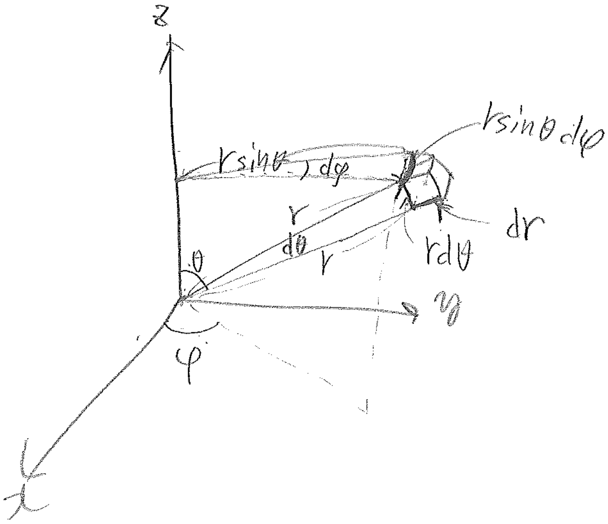
これが全重さとなる。

また $dV = dx\,dy\,dz$

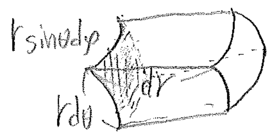
と表わすこともできるだろう。無限小体積を立方体にすればよい。

ここで $dx\,dy\,dz$ を他の座標系であらわすことにしよう。

極座標とは以下のようなものである

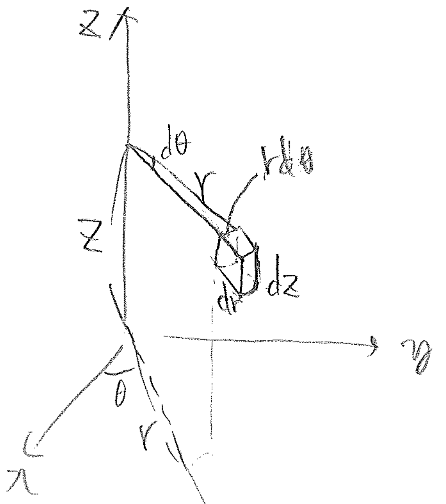


⇒



ゆえ $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

円筒座標では



ゆえ $dV = r \, dr \, d\theta \, dz$

ここで一つれんしゅうしてみよう。

問 $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{-\frac{r^2}{2}}$ $(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$ のとき

半径Rの球内で $|\psi(r)|^2$ を体積分せよ

$(1 - e^{-R^2})$

Ⅱ ベクトル

1 線形独立

ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ があったとする。

このとき

$$k\mathbf{a} + l\mathbf{b} + m\mathbf{c} = 0$$

となるような k, l, m が $k = l = m = 0$ しかないとき

線形独立 という。このとき

$$\mathbf{c} = k\mathbf{a} + l\mathbf{b}$$

という形にあらわすことは不可能である。

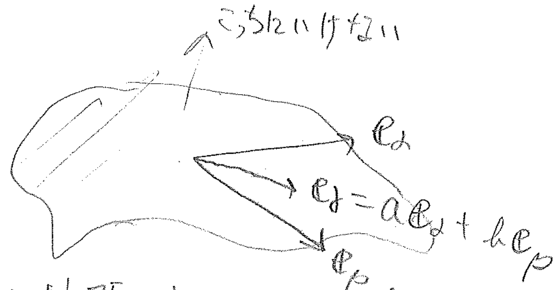
たとえば3次元空間では

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \qquad \mathbf{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

と書けば スカラー x, y, z をかえればすべてのベクトルを表現できる。

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}_\alpha + \beta\mathbf{e}_\beta + \gamma\mathbf{e}_\gamma$$

と書いたとき、$\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma$ が一次独立なら、すべてのベクトルを表現できるが一次独立でない、すなわち一次従属なら $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta$ がはる面上に $\mathbf{e}_\gamma$ がきているためどうあがいても $\mathbf{a}$ はこの面からでられない



これを拡張すれば n 次元空間では 1次独立な n 個のベクトルがあれば、その一次結合
($a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots$ みたいにスカラをかけて、他のベクトルとたしていく)
ですべて表現できる。

2 内積・外積・テンソル積

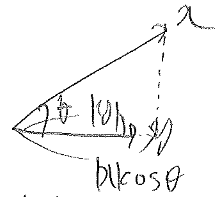
・内積 とは

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

となっているとき

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

という。



右図のようにとれば

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos\theta$$ ⇒すなわち $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が直交していれば $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ である

とくに $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{n}$, $|\boldsymbol{n}| = 1$ ならば

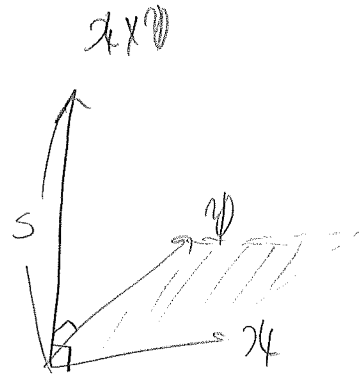
$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} = |\boldsymbol{x}| \cos\theta = (\boldsymbol{x})_{n\text{方向成分}}$$ ⇐ けっこう重要!!

となる。

・外積とは

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_2 - x_2 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

という。$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ のどちらにも垂直で向きは $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ への右ねじの方向、大きさは、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とがつくる平行四辺形の面積である。



・テンソル積

$$x y = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}$$

をテンソル積という。左辺を2階テンソルという。

つまり2階テンソルとは2つのベクトルから作られたテンソル積である。

テンソル積を直積といったり

$$x \otimes y$$

と書いたりする。

テンソルの別の定義はベクトルが座標変換に対して

$$x' = A x \Rightarrow x'_j = \sum_i a_{ij} x_i$$

と変換されるような2階テンソルが

$$X'_{lm} = \sum_i \sum_j a_{il} a_{jm} X_{ij}$$

となるようなものを指す。

3 シュミットの正規直交化

n次元ベクトル

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$$

と書かれているとしよう。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n$は一次独立であるが、直交していないとする。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots$から正規(大きさが1)でおたがい直交しているベクトル、正規直交規底を求めよう。

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|}$$

とすれば$\boldsymbol{e}_1$は大きさ1である。

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{e}_1|}$$

とすれば大きさが1で$\boldsymbol{e}_1$とは

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{|\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{e}_1|}\{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1\} = 0$$

で直交している。

これをくりかえして

$$\boldsymbol{e}_n = \frac{\boldsymbol{x}_n - \sum_{i=1}^{n-1}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{e}_i}{\left|\boldsymbol{x}_n - \sum_{i=1}^{n-1}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{e}_i\right|}$$

とすれば、正規直交基底が求まる。

III ベクトル解析

1, ∇ について

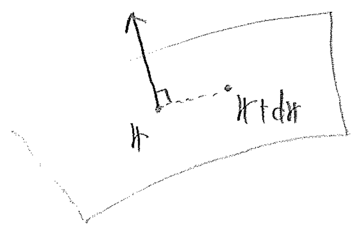
・grad

いまあるスカラー関数 $f(\mathbf{r})$ を考えよう。 $\mathbf{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$f(\mathbf{r})=$一定 の面上で $\mathbf{r}$を $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$まで動かす。

このとき

$f(\mathbf{r}+d\mathbf{r})-f(\mathbf{r})=df(\mathbf{r})=0$ と書こう



すると

$$df(\mathbf{r})=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$=\nabla f\cdot d\mathbf{r}=0$$

ここでナブラベクトル $\nabla=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ を定義した。

∇fを $\mathrm{grad}\, f$ と書いたりする。「グラディエント」とよんだりする。「勾配」も…。

∇に作用されるものがスカラのとき つまりfがスカラーだから $\nabla f=\mathrm{grad}\, f$ と書く。$\mathbf{a}$ がベクトルであるならば $\nabla\cdot\mathbf{a}=\mathrm{div}\,\mathbf{a}$ と書く。「ダイバージェンス」とか「わき出し」という。∇はあくまでもベクトルである。∇ と $\mathbf{a}$は内積・で結ばれている。

$\mathrm{grad}\, f$の性質をみる。$\nabla f\cdot d\mathbf{r}=0$から ($d\mathbf{r}$は $f=$一定面上)

∇fは $f=$一定 と垂直である。いま,等高線を考えてみよう。

真上からみた図

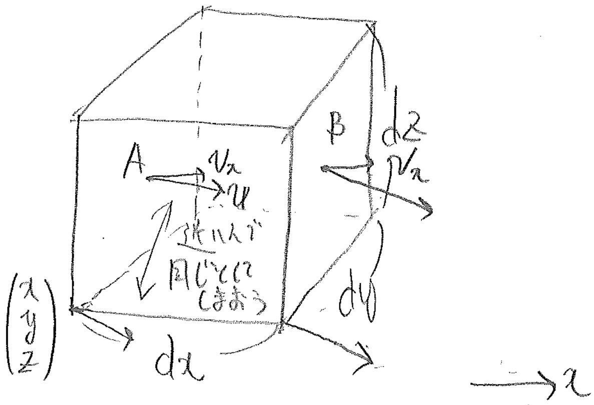
高さをあらわす関数h(r)としよう。
∇hは等高線に垂直で低いほうから高いほうへと向かう。
大きさは等高線がこんでいるときのほうが大きい。山にのぼろうとしたとき
∇hはそこでの一番きついさかの方向とさかのきつさを示していると考えればよい。
こう考えると しゃ面にボールをおくと $-\nabla h$の方向に ころがりそうだ。
しかも、ころがる いきおいも $-\nabla h$の大きさであろう。たかさのかわりにポテンシャルϕを
導入すれば

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\,\phi$$

とかけるのもよくわかる。

・div

今、水が速度$\boldsymbol{v}$で動いているとしよう



上のような微小立方体を考える。この立方体からでていく水の体積をもとめよう。

A面から入ってくる水の体積は（単位時間あたり）

$$v_x(x,y,z)\,dy\,dz$$

B面からでていく水の体積は

$$v_x(x+dx,y,z)\,dy\,dz$$

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\{v_x(x+dx,y,z)-v_x(x,y,z)\}\,dy\,dz=\frac{\partial v_x}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

だけA, B面についてわき出す。他の4面も考えると、

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

ここで

$$\frac{\text{わきだした体積}}{\text{体積}}$$

（⇐ divergenceの定義）

を考えれば

$$\frac{\text{わき出し}}{\text{体積}}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$$

となる。

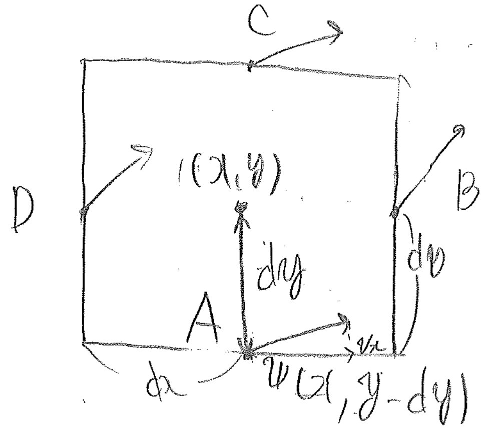
div $\boldsymbol{v}$の性質はのべたとおりであろう。

・rot

まれ水の速度 $v=(x,y)$ （2次元）を考え微小長方形 $dx\,dy$ を考える。

このとき水はこの角内でどれぐらい回っているだろうか？

左回りを正とする



どれくらい回っているかを表すのに角速度をもちいよう

すると点A上の角速度 $\left(\dfrac{\text{左回りの速さ}}{\text{中心からの距離}}\right)$ は

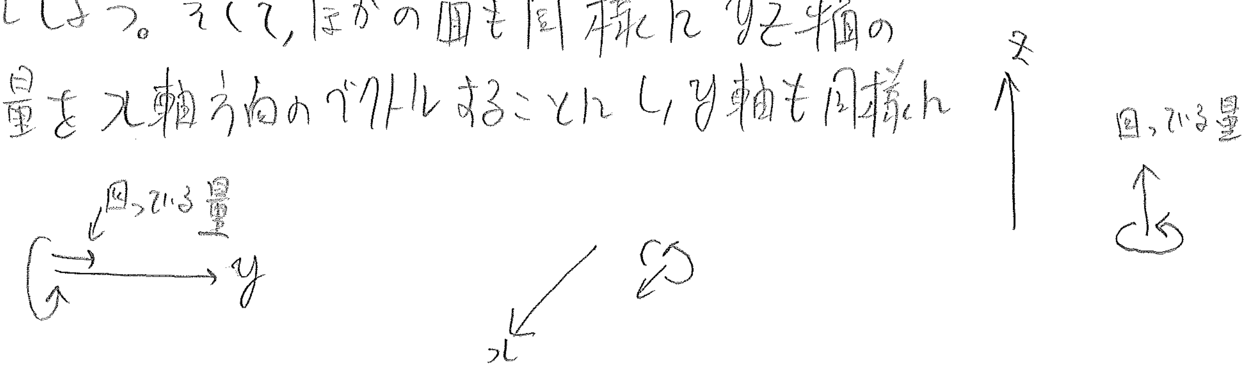
$$\frac{v_x(x,y-dy)}{dy}$$

同様にB, C, Dについてその平均をとれば

$$\frac{1}{4}\left(\frac{v_y(x+dx,y)-v_y(x-dx,y)}{dx}-\frac{v_x(x,y+dy)-v_x(x,y-dy)}{dy}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\frac{\partial v_y}{\partial x}-2\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

これを3次元に拡張したい。xy 平面まわりの回っている量を z 軸方向のベクトルとることにしよう。そして，ほかの面も同様に yz 平面の回っている量を x 軸方向のベクトルすることにし，y 軸も同様にする。



これらをあわせてベクトルとして回っている量を示すベクトルにしてしまおう。
そうすれば

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\nabla \times v = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\, v$$

として, rot を「ローテーション」または回転とよぼう。

注) 実際の平均角速度は $\left|\frac{1}{2}\mathrm{rot}\, v\right| = \frac{1}{2}|w| = \theta$ であることに注意しよう。

なお

$$\nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \triangle$$

をラプラシアンとよぼう。$\triangle \neq \mathrm{grad\,div}$ に注意しよう。
ここでベクトル解析のよく使う公式をあげておこう。

特に重要

$$\begin{cases} \mathrm{rot\ grad}\, f = 0 & (\nabla\times(\nabla f) = 0) \\ \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, a) = 0 & (\nabla\cdot(\nabla\times a) = 0) \\ \mathrm{rot\ rot}\, a = \mathrm{grad\,div}\, a - \triangle a & (\nabla\times(\nabla\times a) = \nabla(\nabla\cdot a) - \triangle a) \end{cases}$$

$$\nabla\cdot(fa) = f\nabla\cdot a + a\cdot\nabla f$$

$$\nabla\times(fa) = f(\nabla\times a) - a\times(\nabla f)$$

$$\nabla\cdot(a\times b) = b\cdot(\nabla\times a) - a\cdot(\nabla\times b)$$

$$\nabla(a\cdot b) = (a\cdot\nabla)b + (b\cdot\nabla)a + a\times(\nabla\times b) + b\times(\nabla\times a)$$

$$\nabla\times(a\times b) = (b\cdot\nabla)a - (a\cdot\nabla)b + a(\nabla\cdot b) - b(\nabla\cdot a)$$

○ だそく

∇, $\triangle$ があれば $\Box$ もあるのか? 実はある $\Box$ はダランベルシアンという。相対論で使う。
ゆがんでいない空間であれば

$$\Box \equiv \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

である。ゆがんだ空間だと

$$\Box \equiv \nabla_\nu \nabla^\nu = \nabla^\nu \nabla^\nu g_{\nu\nu} \quad (g_{\nu\nu}: 動テンソル)$$

という非常にやっかいなしろものである。

2 ベクトルと演算子

∇ はベクトルであり演算子である。演算子は $\frac{\partial}{\partial x}$ や $\frac{d}{dx}$，はたまた

$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\cdot$ たんに $\hbar$ も演算子と見れる。演算子は作用される

ものを意識しなければならない。演算子はふつう右にくるものに演算をほどこす。

そのため かってにいれかえてはいけない。

$$\nabla\cdot a \neq a\cdot\nabla$$

である。

$$\hbar x \neq x\hbar$$

の例はあきらかであろう。

ベクトル解析では演算子もベクトルも用いる。ベクトルについても

$$a(b\cdot c) \neq (a\cdot b)c$$

であるし，

$$a\times b = -b\times a$$

なので演算順序を常に意識し，注意を払わなければならない。

ここで少し練習してみよう。

問1，交換子 $[a,b] = ab - ba$ で定義する。

このとき

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}]$$

を求めよ。

$(i\hbar)$

問2，$v = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cr^{n-1}y \\ cr^{n-1}x \\ 0 \end{pmatrix}$，$r = \sqrt{x^2+y^2}$ のとき

$(v\cdot\nabla)v$ と $\mathrm{rot}\, v$ を求めよ。

（ヒント $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ となることを確かめておく）

$$\left(\begin{array}{l} (v\cdot\mathrm{grad})v = -c^2 r^{2(n-1)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathrm{rot}\, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c(n+1)r^{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

3 ベクトルの積分

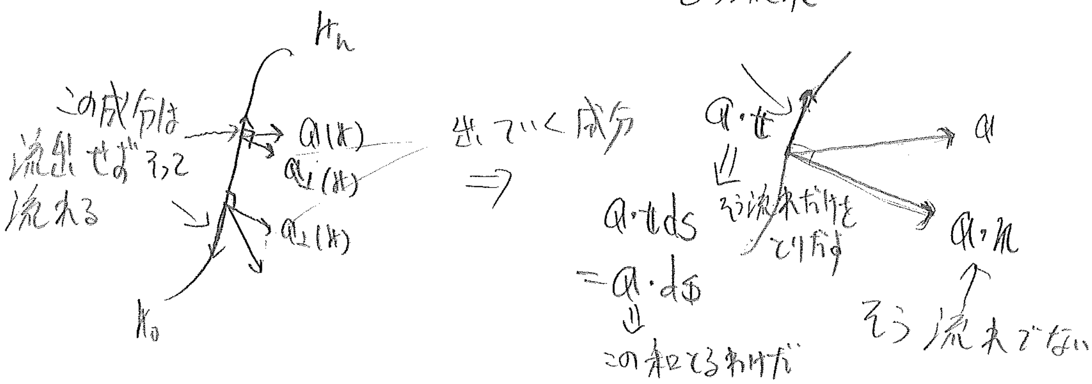
・ベクトルの線積分，体積分はスカラーの場合とほぼ同じである。
つまり

$$I_s = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_n} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{s}, \quad I_V = \iiint_{\text{立体全部}} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\, dV$$

かわったのは $ds \to d\boldsymbol{s}$ つまりたんなる長さでなく進行方向を向く微小ベクトルになったわけである。

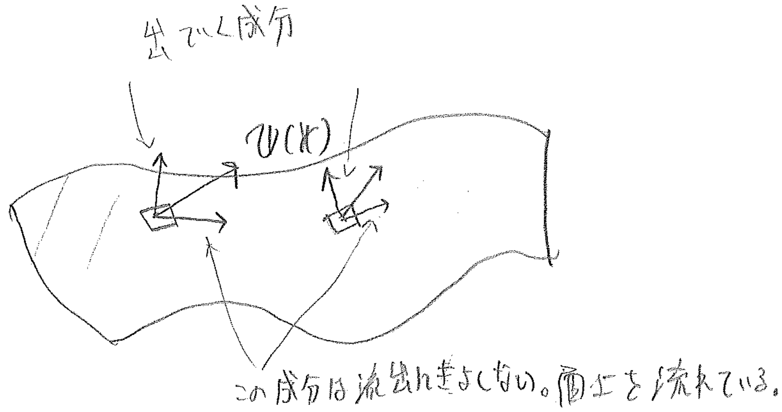
$$d\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad ds = |d\boldsymbol{s}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$ だったわけである。

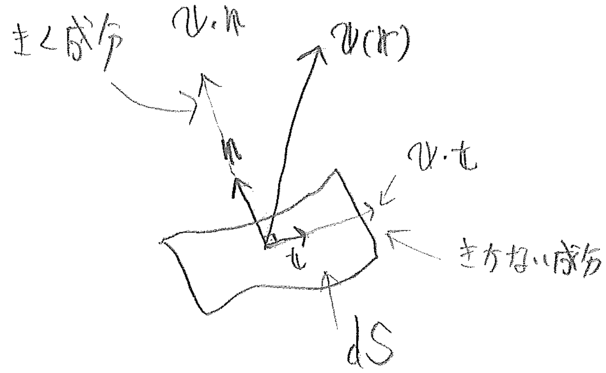
I_s は $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{s}$ の和である。内積の和なのでスカラーである。
I_s の意味するところは



たとえば $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ が速度だとすれば I_s はこの曲線上を流れている流量となる。

通過する単位時間当たりの流量（体積）を3次元で考えると，面積分がでてくる。





$v(r) \cdot n\, dS$ の和をとれば面積分となる。

すなわち

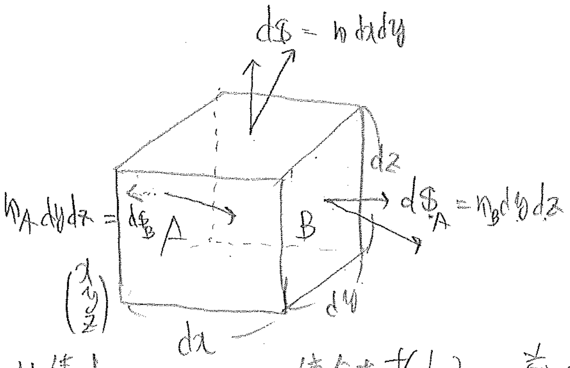
$$\iint_{\text{面全体}} v(r) \cdot n\, dS = \iint_{\text{面全体}} v(r) \cdot d\boldsymbol{S}$$

ここで $d\boldsymbol{S} \equiv n\, dS$ と定義し $d\boldsymbol{S}$ を面積要素という。
$d\boldsymbol{S}$ の大きさは考えている微小面の面積を示し、方向は面に垂直で外向きを示している。

（注：実は"外向き"の数学的定義は難しい。まあ、だいたい外向きと思っていれば問題ないでしょう。）

4 ガウスの定理・ストークスの定理

ところで面積要素は外向きであった。



上の小体積 dV について面積分を考える。前の議論と同様に行えば、AB面について

$$\{v_x(x+dx, y, z) - v_x(x, y, z)\}\,dy\,dz \left(= \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\right)$$

$$= \{\boldsymbol{v}(x+dx, y, z)\cdot\boldsymbol{n}_B + \boldsymbol{v}(x, y, z)\cdot\boldsymbol{n}_A\}\,dy\,dz$$

$$= \boldsymbol{v}(x+dx, y, z)\cdot d\boldsymbol{S}_A + \boldsymbol{v}(x, y, z)\cdot d\boldsymbol{S}_B$$

6面全てを考えれば、

$$\iint_{\partial V} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$$

これが $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$ となるので

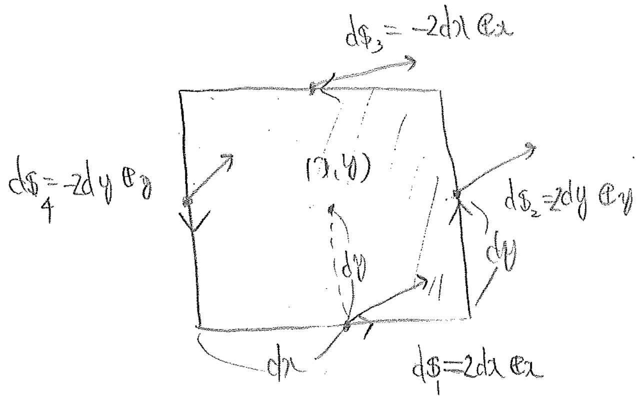
$$\iint_{\partial V} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$$

これをいっぱいあつめると

$$\iint_{\partial V} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,dV$$

これをガウスの定理という

ところで線素$d\mathbb{s}$はベクトルである



$$d\mathbb{S}=4dxdy\,\mathbb{e}_z$$

上図dcの線積分を考える。前の議論と同様に行えば

$$\frac{1}{2}\left(\frac{v_y(x+dx,y)-v_y(x-dx,y)}{dx}-\frac{v_x(x,y+dy)-v_x(x,y-dy)}{dy}\right)\left(=(\mathrm{rot}\,\mathbb{v})_z\right)$$

$$=\frac{\mathbb{v}(x+dx,y)\cdot\mathbb{e}_y}{2dx}-\frac{\mathbb{v}(x-dx,y)\cdot\mathbb{e}_y}{2dx}-\frac{\mathbb{v}(x,y+dy)\cdot\mathbb{e}_x-\mathbb{v}(x,y-dy)\cdot\mathbb{e}_x}{2dy}$$

$$=\frac{\mathbb{v}(x+dx,y)\cdot\frac{d\mathbb{s}_2}{2dy}+\mathbb{v}(x-dx,y)\cdot\frac{d\mathbb{s}_4}{2dy}}{2dx}+\frac{\mathbb{v}(x,y+dy)\cdot\frac{d\mathbb{s}_3}{2dx}+\mathbb{v}(x,y-dy)\cdot\frac{d\mathbb{s}_1}{2dx}}{2dy}$$

一周を示す

$$=\frac{1}{4dxdy}\oint_{dc}\mathbb{v}\cdot d\mathbb{s}$$

これが

$$(\mathrm{rot}\,\mathbb{v})_z=\mathrm{rot}\,\mathbb{v}\cdot d\mathbb{S}\,\frac{1}{4dxdy}$$

3成分合わせて

$$\therefore\ \oint_{dc}\mathbb{v}\cdot d\mathbb{s}=\mathrm{rot}\,\mathbb{v}\cdot d\mathbb{S}$$

これをいっぱいあつめれば

$$\oint_{\partial S}\mathbb{v}\cdot d\mathbb{s}=\iint_S\mathrm{rot}\,\mathbb{v}\cdot d\mathbb{S}$$

これをストークスの定理という

5 曲線座標系の演算子

極座標

$$\mathrm{grad}\,\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial \phi}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{div}A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\mathrm{rot}\,A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\left\{\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right\} \\ \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right\} \\ \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right\} \end{pmatrix}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

円筒座標

$$\mathrm{grad}\,\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{div}\,A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\,A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

なお，これを求めるのはけっこうむずい

IV 複素関数

1 正則とコーシーリーマン

$$f(x+iy) = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = w$$

という関数を複素関数という

wの微分を考えよう

$$w = f(z)$$

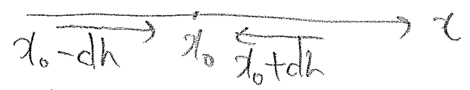
$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0} = f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

この値が決まるとき $z = z_0$ で微分可能であるという。

さらに z_0 のいかなる近ぼうでも微分可能なとき $z = z_0$ で正則という。

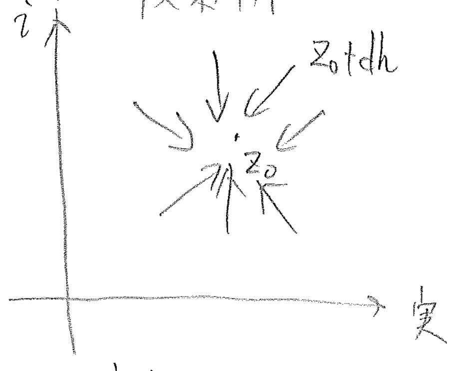
ところで $z \to z_0$ について考えよう

実関数のときは $x \to x_0$ は

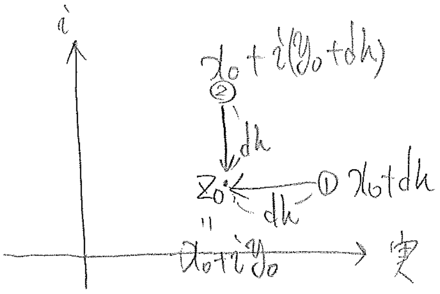


の2方向を意味した。

ところが複素関数では



あらゆる方向がある。つまり正則である条件は実関数のときよりきびしくなる



今上図のように2通りの近づけ方を考える。z_0で正則であるとすれば

①
$$\frac{f(z_0+dh)-f(z_0)}{dh}=\frac{1}{dh}\left[u(x_0+dh,y_0)+iv(x_0+dh,y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)\right]$$

$$=\frac{u(x_0+dh,y_0)-u(x_0,y_0)}{dh}+i\frac{v(x_0+dh,y_0)-v(x_0,y_0)}{dh}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

② $$\frac{f(z_0+idh)-f(z_0)}{idh}=\frac{1}{idh}\left[u(x_0,y_0+dh)+iv(x_0,y_0+dh)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)\right]$$

$$=\frac{u(x_0,y_0+dh)-u(x_0,y_0)}{idh}+\cancel{i}\frac{v(x_0,y_0+dh)-v(x_0,y_0)}{\cancel{i}dh}$$

$$=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

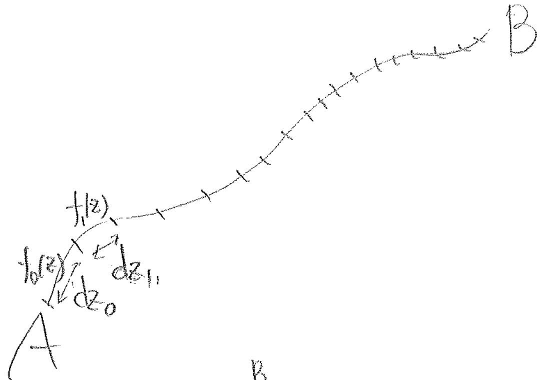
①=②より

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

これをコーシーリーマンの関係という

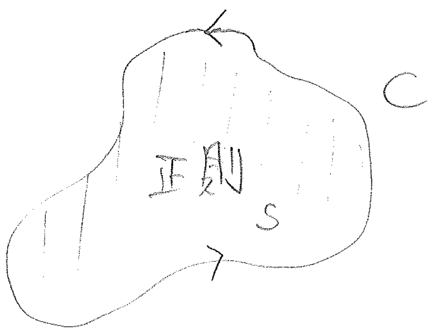
2 複素積分とコーシーの定理

複素関数は$f(z)=f(x,y)$ と考えることができる
つまり複素関数の積分は線積分と考えればよい



$$\sum_{i=0}^{n} f_i(z)\,dz_i = \int_A^B f(z)\,dz$$

と書く



ある閉領域を考え内部全て正則としよう(Cとも)
今, $f(z)=\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ とし $d\boldsymbol{z}=dz\cdot\boldsymbol{e}_z$, $d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_z dS$ としよう
つまりスカラーを z軸におけ複素空間をxyz座標で考える。
ゆえ

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C \boldsymbol{f}(x,y)\cdot d\boldsymbol{z} \underset{\text{ストークスの定理}}{=} \iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f})_z dS$$

$$=\iint_S \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\substack{\shortparallel \\ 0.\ \text{コーシーリーマン}}} dS=0$$

ゆえに

$$\oint_C \underbrace{f(z)}_{\text{正則}}dz=0$$

これをコーシーの定理という

このページはまちがってる
水く団

3 ローラン級数と留数定理

正則は実関数の微分可能より条件が厳しい。

それゆえ

- 正則な関数は何回でも微分できる

- 正則な関数を正則に広げる方法は一通りしかない（解析接続）

などの性質があらわれる。

実関数のときと同じように $f(z)$ が何回でも微分可能＝正則なら

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

とあらわせる。

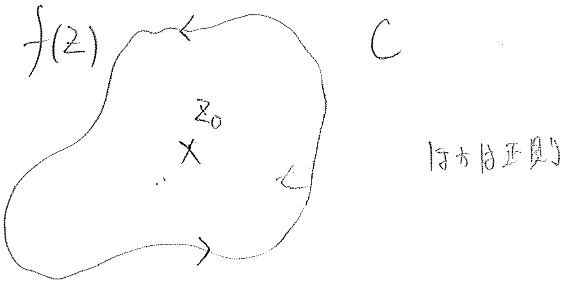
$f(z)$ が $z=z_0$ で特異点をもっていたら

$$f(z) = \cdots\cdots + c_{-2}\frac{1}{(z-z_0)^2} + c_{-1}\frac{1}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots\cdots$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

とあらわせることがわかっている。これをローラン展開という。なお $z=z_0$ が k 位の極，（たとえば $\frac{1}{(z-z_0)^k}$ があるとき）とわかっているときは

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_i (z-z_0)^n$$

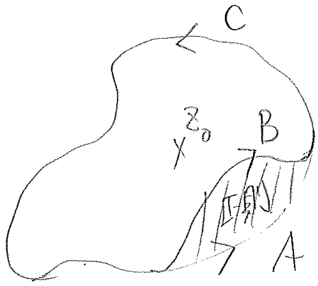
とかけることもわかっている。



いま，f(z)がz_0で1つだけ特異点をもっているとしよう。C上で積分すると

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \oint_C (z-z_0)^n dz$$

ここで $z=z_0$ 以外のC内は正則である

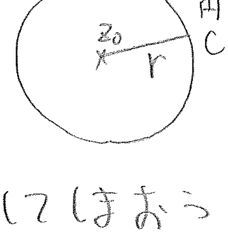


上図の経路では

$$\int_A + \int_{逆B} = \int_A - \int_B = \oint_{A逆B} = 0$$

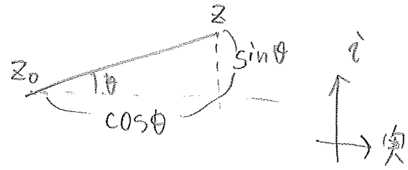
$$\therefore \int_A = \int_B$$

つまり z_0をよこぎらなければCを曲げてしまってもよい。ここで都合よく



という円にしてしまおう

$$\oint_C (z-z_0)^n dz$$



$$z-z_0 = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とおく

$$\frac{dz}{d\theta} = r\,i\,e^{i\theta}$$

一周は θが0から2πまで変化させればよい

$$\oint_C (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} i r^{n+1} e^{i\theta(n+1)} d\theta$$

ここで $n \neq -1$ のとき

$$= i r^{n+1} \frac{1}{i(n+1)} \left[e^{i\theta(n+1)} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{r^{n+1}}{n+1} \left[\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta \right]_0^{2\pi} = 0$$

$n=-1$ のとき

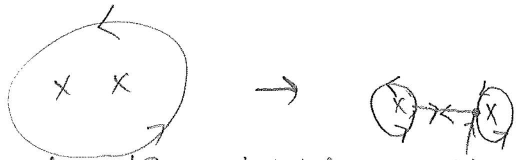
$$= \int_0^{2\pi} i\,d\theta = 2\pi i$$

ゆえに

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i C_{-1} \equiv 2\pi i \underbrace{\mathrm{Res}(z_0)}$$

z_0における留数とよぶ

また2つ以上特異点があっても



とすれば たんなるたし算になる

ゆえに有限個nだけ特異点があっても

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(z_j)$$

これを留数定理とよぶ

4 留数を求める

$$\oint f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(z_j)$$

これはべんりだ。なにせ留数さえわかっちまえば積分と同じ。
積分が足し算になったんだから！

ところで、このResを求めよう。
ある特異点z_0がk位の極だったとしよう

$$f(z) = c_{-k}(z-z_0)^{-k} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots$$

$$(z-z_0)^k f(z) = c_{-k} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^k + c_1(z-z_0)^{k+1} + \cdots$$

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{(z-z_0)^k f(z)\} = c_{-1}(k-1)! + c_0 k!(z-z_0) + c_1(k+1)!(z-z_0)^2 + \cdots$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{(z-z_0)^k f(z)\} = c_{-1}(k-1)!$$

$$\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{(z-z_0)^k f(z)\} = c_{-1} = \mathrm{Res}(z_0)$$

これにより留数がもとまった

問 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$ を求めよ。 $\left(\frac{\pi}{e}\right)$

V 線形微分方程式

1 1階微分方程式

V章では線形微分方程式をあつかう。線形とは、ある方程式の解 y_1, y_2 があったとき、その線形結合 $y_3 = ay_1 + by_2$ (a, b は定数)も解になることを言う。1節では「1階定係数微分方程式」
1階とは1回微分する項があることを示す。

$$\frac{dy(x)}{dx} + b\,y(x) = f(x) \qquad (b:\text{定数})$$

をあつかう。$f(x) \equiv 0$ のとき線形となる。$f(x) \equiv 0$ のとき同次といい、$f(x) \not\equiv 0$ のとき非同次という。ここではあくまで「解き方」を学ぶだけとする。細かい「数学的」なことは「手ぬき」をすることにしよう。

まず、同次の場合

$$\frac{dy(x)}{dx} + b\,y(x) = 0 \qquad (b:\text{定数})$$

を考える。

$$\frac{dy}{dx} = -by$$

とすれば「y を微分すると $-by$ となる」関数が解である。
直感的に

$$e^{-bx}$$

が解であることがわかる。
一般にn階線形微分方程式には線形独立な「基本解」が n 個あることが知られている。そしてその方程式をみたすすべての解は(一般解という)基本解の一次結合で表わされる。
基本解のとり方は、線形独立ならどのようにとってもよい。

今の場合1階線形微分方程式なので基本解は1個である。
つまり一般解は

$$y(x) = Ae^{-bx} \quad (A: 任意定数)$$

となる。Aは一つの「境界条件」から決まることになる。この場合任意定数はA一つなので「境界条件」は一つあればよい。例えば $y(0)=0$ とか $\frac{dy(3)}{dx}=5$ とかである。
境界条件にはいろいろあるが代表的なものとして

境界で $y = \mathrm{const}$ 　ディリクレ問題

境界で $\frac{dy}{dx} = \mathrm{const}$ 　ノイマン問題

境界で $y + c\frac{dy}{dx} = \mathrm{const}$ 　第3種問題

という。

同次解は求まった。次に非同次解を求めてみよう。

$$\frac{dy(x)}{dx} + by(x) = f(x)$$

この解を求めるには

$$y(x) = A(x)\,e^{-bx}$$

とおくとよい。$A(x)$ は x の関数で e^{-bx} は $f(x)\equiv 0$ のときの，つまり同次のときの基本解である。
この $y(x)$ を代入すると

$$\frac{d}{dx}\left\{A(x)e^{-bx}\right\}+bA(x)e^{-bx}=f(x)$$

$$e^{-bx}\frac{dA(x)}{dx}-\cancel{be^{-bx}A(x)}+\cancel{bA(x)e^{-bx}}=f(x)$$

$$\frac{dA(x)}{dx}=e^{bx}f(x)$$

$$A(x)=\int^{x}e^{bx}f(x)dx+B \qquad (B:任意定数)$$

$\int^{x}$ は不定積分 $\int$ の任意定数部分をのぞいたものである。

ゆえに一般解は

$$y(x)=Be^{-bx}+e^{-bx}\int^{x}e^{bx}f(x)dx$$

となる。Be^{-bx} の項は同次のときの一般解である。うしろがわの項を「特解」という。一般に定数係数微分方程式は

(同次のときの一般解)+(特解)

の形をしている。つまり同次のときの一般解を求め、そして特解をもとめるという手順をふめばよいことがわかる。
またここの B も境界条件から決まる。

問 $\dfrac{dy(x)}{dx}-y(x)=x \qquad y(0)=0$

の解を求めよ。

$(y(x)=e^{x}-x-1)$

2　2階同次微分方程式

この節では「2階定係数同次微分方程式」をあつかう。つまり

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+a\frac{dy(x)}{dx}+by(x)=0$$

を解くことを考える。2階定係数なので2つの基本解を求めればよい。
gについての2次方程式

$$g^2+ag+b=0$$

の2つの解をα, βとすれば上の同次方程式は

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)y(x)=0$$

と因数分解でき、

$$\frac{dy(x)}{dx}-\alpha y(x)=0 \quad \text{又は} \quad \frac{dy(x)}{dx}-\beta y(x)=0$$

をみたせばよいことがわかる。これらの基本解は各々

$$e^{\alpha x},\ e^{\beta x}$$

となることが前節でわかっている。つまり一般解は

$$y(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x} \qquad \left(\begin{aligned}\alpha&=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}\\ \beta&=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\end{aligned}\right)$$

となる。　　　　A, B：任意定数

問　$y(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$ が解になっていることをたしかめよ。

ただ重解の場合困る。αを重解にもつとしよう。
もう一つの解を $y(x)=A(x)e^{\alpha x}$ とおいて代入してみる。

$$\frac{d^2}{dx^2}(A(x)e^{\alpha x})+a\frac{d}{dx}(A(x)e^{\alpha x})+bA(x)e^{\alpha x}=0$$

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2}\cancel{e^{\alpha x}}+2\alpha\frac{dA(x)}{dx}\cancel{e^{\alpha x}}+\alpha^2A(x)\cancel{e^{\alpha x}}+a\frac{dA(x)}{dx}\cancel{e^{\alpha x}}+a\alpha A(x)\cancel{e^{\alpha x}}+bA(x)\cancel{e^{\alpha x}}=0$$

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2}+(2\alpha+a)\frac{dA(x)}{dx}+(\alpha^2+a\alpha+b)A(x)=0$$

$$\begin{cases}\alpha=-\dfrac{a}{2} & (\because \alpha\text{は重解})\\ \alpha^2+a\alpha+b=0 & (\because \alpha\text{は解})\end{cases}$$ より

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2}=0$$

$$\therefore A(x)=C+Dx$$

つまりもう一つの基本解に $xe^{\alpha x}$ を選べばよい。

このようにして基本解がもとまる。ただ基本解の選び方は、おたがいが線形独立ならよいので、ほかのものをえらんだ方がよいことがある。よいというのは、境界条件によっては、その基本解のほうが扱いやすい場合があるからである。

i) 解が2つの異なる実数のとき

$$e^{\alpha x},\ e^{\beta x}$$

しかない。ただ $\beta = -\alpha$ つまり解が $\pm\alpha$ のときは

$$\sinh\alpha x,\ \cosh\alpha x \qquad \sinh\alpha x = \frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{2} \quad \cosh\alpha x = \frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2}$$

ともおける。$y(0) = \mathrm{const}$ や $\frac{dy(0)}{dx} = \mathrm{const}$ などの境界条件を与えられたときはこちらの方がよいことがある。

ii) 解が重解のとき

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x}$$

しかない。

iii) 解が2つの異なる虚数解のとき、
解が $\lambda \pm i\alpha$ なる形をしているとすれば

$$e^{\lambda x}\sin\alpha x,\ e^{\lambda x}\cos\alpha x$$

ともおくことができる。なぜなら $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ と分解できるからである。
$\lambda = 0$ なら

$$\sin\alpha x,\ \cos\alpha x$$

とおけばよい。$y(0) = \mathrm{const}$ や $\frac{dy(0)}{dx} = \mathrm{const}$ などの境界条件を与えられたときこちらのほうがよいことがある。

問 $\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\phi \quad (\phi(0) = \phi(a) = 0)$ を解け

$$\left(\phi = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n \quad ; \ \phi_n = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right)$$

3　2階非同次微分方程式

前節で同次解が求まった。非同次解は

（同次の一般解）＋（特解）

になっている。この特解を求める方法として未定係数法を紹介する。実は「微分演算子法」というすぐれた方法があるのだが、「手ぬき」のため省略する。

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+a\frac{dy(x)}{dx}+b\,y(x)=f(x)$$

この方法では $f(x)$ が初等関数（よく知っている関数）でないとできない。

i) $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ のとき

特解は

$$y_0=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

となることがわかっている。

これをもとの微分方程式に代入し，x が変数（任意の数）であることを使い $b_0, b_1, \cdots, b_n$ を決定する。

問　$\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}-2\dfrac{dy(x)}{dx}+y(x)=x+1$　を解け。

$\left(y(x)=Axe^x+Be^x+x+3\right)$

ii) $f(x) = Ae^{cx}$ のとき

$y_0 = Be^{cx}$ とおき B を決定する。

iii) $f(x) = A\sin nx$ or $A\cos nx$ のとき

$y_0 = B\sin nx + C\cos nx$ とおき B, C を決定する

ただし 同次基本解が $e^{\alpha x}, e^{\beta x}$ のとき $f(x) = Ae^{\alpha x}$ or $Ae^{\beta x}$ のときは

$y_0 = Bxe^{\alpha x}$ or $Bxe^{\beta x}$

とおけばよい。

さらに 重解 α のときに $f(x) = Ae^{\alpha x}$ のときは

$y_0 = Bx^2e^{\alpha x}$

とおけばよいことがわかっている。iii)のケースでも注意が必要である。というのも,

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ であり, sin, cos は exp と同じような働きをもつからである。

$\alpha = n$ or $\beta = n$ のときは exp 形になおしてから計算するとよいだろう。

$f(x)$ が i) ii) iii) の1次結合になっている場合も y_0 を一次結合させればよい

つまり $f(x) = x^2 + e^x$ のときは $y_0 = Ax^2 + Be^x$ とおけばよいわけである。

問 $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} - 2\dfrac{dy(x)}{dx} + y(x) = 2e^x + 1$ を解け

$\left(y(x) = Axe^x + Be^x + x^2e^x + 1\right)$

4 変数分離による偏微分方程式

今までは $y(x)$ で 1変数であったが今度は 2変数の場合を考える。次の例題を見ながら考えよう。

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2}+\lambda^2 U(x,y)=0$$

$$U(0,y)=U(a,y)=U(x,0)=U(x,b)=0$$

この問題をとくのに「変数分離」という手法を用いる。これは

$$U(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$$

というふうに分離できると仮定してしまうのである。だいたいの問題がこの方法で解けることが知られている。このUを代入すると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(X(x)\cdot Y(y))+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(X(x)\cdot Y(y))+\lambda^2 X(x)\cdot Y(y)=0$$

$$Y(y)\frac{d^2X(x)}{dx^2}+X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\lambda^2 X(x)Y(y)=0$$

両辺 $X(x), Y(y)$ で割る

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\lambda^2=0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\left(\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\lambda^2\right)$$

ここで左辺はxだけの関数，右辺はyだけの関数となってる。x, yは変数（任意）なので両辺は定数でなければならない。

また

$$U(0,y)=U(a,y)=U(x,0)=U(x,b)=0$$ より

$$X(0)=X(a)=Y(0)=Y(b)=0$$ である。

両辺の定数が $C>0$ であるとすると

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=C$$

$$X=Ae^{\sqrt{C}x}+Be^{-\sqrt{C}x}$$

$X(0)=X(a)=0$ より $A=B=0$ $\therefore X\equiv 0$

同様に $Y\equiv 0$ となり $U\equiv 0$ となってしまう。これは自明解であり、

$U\not\equiv 0$ の解をさがさなければならない。つまり $c<0$ である。

ここで

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\left(\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\lambda^2\right)=-\mu^2$$

とおく。すると、

$$\begin{cases} X=A\cos\mu x+B\sin\mu x \\ Y=C\cos\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\,y+D\sin\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\,y \end{cases}$$

ここで

$X(0)=X(a)=Y(0)=Y(b)=0$ より $A=C=0$

$$X(a)=B\sin\mu a=0$$

$$\mu a=m\pi \quad (m=1,2,\cdots)$$

$$Y(b)=D\sin\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\,b$$

$$\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\,b=n\pi \quad (n=1,2,\cdots)$$

ゆえに

$$U_{m,n}(x,y) = A_{m,n} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y \quad (m,n=1,2,\cdots)$$

とすれば

$$U(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_{m,n}$$

となる。

問

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi(x,y,z) = \varepsilon\,\phi(x,y,z)$$

$$\phi(0,y,z) = \phi(x,0,z) = \phi(x,y,0)$$

$$= \phi(a,y,z) = \phi(x,a,z) = \phi(x,y,a) = 0$$

について，ϕを求め 固有値εを求めよ。

$$\left(\begin{aligned} &\phi = \sum_{n_x=0}^{\infty}\sum_{n_y=0}^{\infty}\sum_{n_z=0}^{\infty}\phi_{n_x,n_y,n_z} \quad : \phi_{n_x n_y n_z} = A\sin\frac{n_x\pi}{a}x\sin\frac{n_y\pi}{a}y\sin\frac{n_z\pi}{a}z \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n_x,n_y,n_z = 1,2,\cdots \\ &\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m}\left\{\left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{a}\right)^2\right\} \end{aligned}\right)$$

VI 関数をベクトルに対応させること

1 ベクトルの再考察

ベクトルとは

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

みたいなものであった。今一次独立なベクトル a_1, a_2, a_3 をもってくれば

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$

とあらわせる。a_1, a_2, a_3 の一次結合となっている。このような a_1, a_2, a_3 を「基底」とよぶ。任意のえたいの知れないベクトル x が、分かってる基底とスカラーの結合で表わされている。

無限次元でも同様で

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \cdots$$

ですべての x が、無限個の一次独立な a_n で表わされる。ただ無限次元だと、無限個基底をもってきても、すべての x があらわせるとは限らない。すべての x があらわせるとき、「完全である」という。そして、a_n の組を「完全系」という。
$a_1, a_2, \cdots$ がすべておたがいに直交しているとき「直交基底」といい、さらにすべての a_n が $|a_n| = 1$ のとき「正規直交基底」という。
任意の $\{a_n\}$ 系はシュミットの法うで「正規直交基底」になおすことができる。

内積についても少し考えてみよう。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

の2つを考える。内積は

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

「ベクトルのスカラー要素の積の和」となっている。

内積はあくまでスカラーである。

2 関数とベクトル

$f(x)$が何回でも微分できれば

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

の形にあらわせる。x^nとスカラーの一次結合ですべての何回でも微分できる関数$f(x)$をあらわすことができる。つまり[illegible]は完全系である。よく見ると、

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots$$

とにている。x^nを基底とみなし関数をベクトルに対応させられそうである。
つまり　任意のえたいの知れない関数を分かっている基底とスカラーの結合で表わすことができる！

では、ベクトルと対応させた$f(x)$について調べよう。まずは内積を定義しなければ長さも直交もきめることができない。ベクトルでは

$$(x, y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

「ベクトルのスカラー要素の積の和」であった。
f, gが$a < x < b$で定義されているとき

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

「関数の積の和（積分）のスカラー要素（定積分）」
と定義する。順番は少々ちがうが対応していることはわかるだろう。
この定義はとても一般的なもので

$$(f, g) \leq \sqrt{(f, f)}\sqrt{(g, g)} = |f||g|$$

$$|f| \geq 0$$

などの基本的な内積の性質が成り立つように作られてある。

内積の定義にはほかにもあり

$$(f,g)=\int_0^{\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx$$

$$(f,g)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx$$

など関数が無限区間にわたったときでも対応できるものもある。

また複素関数のときは，ベクトルの内積 $(x,y)=\sum_{j=0}^{\infty} x_j^* y_j$ に対応するように，

$$(f,g)=\int_a^b f^*(x)g(x)dx$$

$$(f,g)=\int_0^{\infty} f^*(x)g(x)dx$$

$$(f,g)=\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx$$

いろいろな基底

では、どのような基底があるだろうか。

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

今 $f(x)$ が $-1 \leq x \leq 1$ で定義されているとする。たとえば 2つの基底 1 と x をとってみると

$$(1, x) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

直交している。しかし、1 と x^2

$$(1, x^2) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right] = \frac{2}{3}$$

となり直交していない。$\{x^n\}$ は直交基底ではない。
$\{x^n\}$ を正規直交化すると、直交化されたものを $\{\phi_n\}$ とすれば

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \, P_n$$

ただし

$$P_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$$ ：ルジャンドルの多項式

となる。
$f(x)$ を $0 \leq x \leq \infty$ とし内積の定義を $(f, g) = \int_0^\infty f g e^{-x} dx$ とすれば
直交系（正規化されていない）は

$$L_n = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n)$$ ：ラゲールの多項式

$f(x)$ を $-\infty \leq x \leq \infty$ とし内積の定義を $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f g e^{-x^2} dx$ とすれば
直交系は

$$H_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$ ：エルミート多項式

がでてくる。

問 ϕ_0, ϕ_1 を正規直交化で求めよ。$\left(\begin{array}{l}\phi_0 = 1 \\ \phi_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}x\end{array}\right)$

$\{x^n\}$系は直交系でないし直交化すると、よくわからない多項式ができてしまう。
よく知っている関数でしかも直交系を成しているものはないのだろうか。
今、$f(x)$が$-a \leq x \leq a$で定義され内積が$(f,g)=\int_{-a}^{a} fg\,dx$で定義されているとする。そのとき基底

$$\left\{1,\ \cos\frac{n\pi}{a}x,\ \sin\frac{n\pi}{a}x\right\} \quad (n=1,2,\cdots)$$

を考える。これは完全であることが知られている。

$$\left(\cos\frac{m\pi}{a}x, \cos\frac{n\pi}{a}x\right) = a\,\delta_{m,n} \qquad \delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}$$

$$\left(\sin\frac{m\pi}{a}x, \cos\frac{n\pi}{a}x\right) = 0$$

$$\left(\sin\frac{m\pi}{a}x, \sin\frac{n\pi}{a}x\right) = a\,\delta_{m,n}$$

$$\left(1,\ \sin\frac{n\pi}{a}x\right) = 0$$

$$\left(1,\ \cos\frac{n\pi}{a}x\right) = 0$$

$$(1,1) = \|1\| = 2a$$

となり直交している。正規直交系は

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2a}},\ \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{n\pi}{a}x,\ \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x\right\}$$

となる。$-a \leq x \leq a$で定義される関数$f(x)$は

$$f(x) = \alpha_0\frac{1}{\sqrt{2a}} + \alpha_1\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{\pi}{a}x + \alpha_2\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{2\pi}{a}x + \cdots$$
$$+ \beta_1\frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi}{a}x + \beta_2\frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{2\pi}{a}x + \cdots$$

と表すことができ、これをフーリエ級数展開とよぶ。

もし$f(x)$が具体的にわかっているとしたら$\{\alpha_n, \beta_n\}$はどのように表せるだろうか。
ベクトルでは、$\{e_n\}$を正規直交基底とすると

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots\cdots$$

と表せる。e_iとの内積をとると

$$x \cdot e_i = x_i e_i \cdot e_i = x_i$$

$$\therefore x_i = (x, e_i)$$

となる。関数でも同様に

$$\alpha_n = \left(f(x), \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{n\pi}{a}x\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\beta_n = \left(f(x), \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\alpha_0 = \left(f(x), \frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

と求められる。つまり、テイラー展開に対応した、

$$f(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos\frac{n\pi}{a}x\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx + \sin\frac{n\pi}{a}x\int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx\right\}$$

フーリエ級数展開が求められる。

問 $-\pi \leq x \leq \pi$で定義される関数$f(x)$が

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq x < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (0 < x \leq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるとき、これをフーリエ級数展開せよ。

$$\left(f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\right)$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad \text{かつ} \quad e^{0} = 1$$

であった。フーリエ級数展開の3つの基底が複素数e^{ix}をもちいればすべてでてくる。
$-a \leq x \leq a$で定義される$f(x)$に対して基底

$$\left\{ e^{\frac{in\pi}{a}x} \right\} \qquad (n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$$

を考えよう。

$$\left(e^{\frac{im\pi}{a}x}, e^{\frac{in\pi}{a}x} \right) = \int_{-a}^{a} e^{-\frac{im\pi}{a}x} e^{\frac{in\pi}{a}x} dx = 2a\,\delta_{m,n}$$

正規直交基底は

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{in\pi}{a}x} \right\}$$

となり

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{in\pi}{a}x}$$

であらわせられる。さらにα_nは

$$\alpha_n = \left(e^{\frac{in\pi}{a}x}, f(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-\frac{in\pi}{a}x} dx$$

となる。複素数をつかえばフーリエ級数展開は

$$f(x) = \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{in\pi}{a}x} \int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-\frac{in\pi}{a}x} dx$$

となる。

問　前問の関数を上の式で展開せよ。

4 級数解法

微分方程式,

$$\frac{dy(x)}{dx} = y(x) \quad , \quad y(0) = 1$$

の解は

$$y(x) = e^{x}$$

である。しかし,もし貴方が e という数を知らなかったらどうしますか。

今, $y(x)$ が何回も微分できるとする。

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

係数 c_n $(n=0,1,\cdots)$ を決めると $y(x)$ が決まる。

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を 微分方程式に代入する。これにより,得体の知れない $\frac{dy(x)}{dx}$ が $\frac{d}{dx}(x^n)$ という よく知っているものに変わる。得体の知らないものをよく知っているものの和に変換するのである。では,代入してみよう。

$$\text{左辺} = \frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d}{dx}(x^n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1) x^n \quad (\Leftarrow n \to n+1)$$

より

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

任意のxでこれが成立するので

$$C_n = (n+1)C_{n+1}$$

$$C_n = \frac{1}{n}C_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}C_{n-2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{n!}C_0$$

C_0は境界条件から定める。

$$y(0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (0)^n = C_0 = 1$$

$$\therefore\ C_0 = 1$$

ゆえに

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$$

I章で述べたようにe^xのマクローリン展開は

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

なので確かに$y(x) = e^x$である。

逆に言えば

$$\frac{dy(x)}{dx} = y(x), \quad y(0) = 1$$

の解を

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \equiv e^x$$

と定義することもできよう。

問 $\left(\frac{d}{dx} + a\right)y(x) = 0$, $y(0) = b$ $(b \neq 0)$

を級数解法で解け。

$$\left(y(x) = b\left(1 + \frac{-ax}{1!} + \frac{a^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-ax)^n}{n!} + \cdots\right)\right)$$

5 非線形常微分方程式

今,非線形常微分方程式

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+4y(x)=0 \quad , y(0)=-2 \ , \frac{dy(x)}{dx}=0$$

を解いてみる。非線形微分方程式は限られたものしか厳密解をもとめられないどころか,係数が限られたもの(固有値)でなければ解が収束しないこともある。今は比較的簡単に解けるものをもってきた。上の式はクンマーの合流型超幾何微分方程式に分類され,合流型超幾何関数の理論を使えば一般的に解けるが又は収束しないことがわかる。しかし,ここではもっと簡単に話をすすめる。

前節同様解を

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

とおく。

これを代入する。

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}c_nn(n-1)x^{n-2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n \quad (\Leftarrow n\to n+2)$$

$$x\frac{dy(x)}{dx}=x\sum_{n=1}^{\infty}c_nnx^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_nnx^n$$

より微分方程式は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+2)(n+1)c_{n+2}+(-2n+4)c_n\Big]x^n=0$$

任意のxで成立するので

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}-2(n-2)c_n=0$$

$$C_{n+2} = \frac{2(n-2)}{(n+1)(n+2)} C_n$$

$$C_n = \frac{2(n-4)}{n(n-1)} C_{n-2}$$

i) nが偶数のとき

$N = \frac{n}{2}$ とおく。$N \geq 2$ のとき $(n = 4, 6, \cdots)$

$$C_{2N} = \frac{\cancel{2}(2N-4)}{\cancel{2}N(2N-1)} C_{2(N-1)} = \frac{2(N-2)}{N(2N-1)} \frac{2(N-3)}{(N-1)(2N-3)} C_{2(N-2)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$= 2^N \frac{0 \cdot 1}{N(N-1)} \frac{1}{(2N-1)(2N-3)\cdots\cdots 1} C_0$$

$$= 0$$

$N = 1$ のとき

$$C_2 = \frac{2 \cdot (-2)}{2 \cdot 1} C_0 = -2C_0$$

境界条件

$$y(0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (0)^n = C_0 = -2 \text{ より}$$

$$C_2 = 4$$

ii) nが奇数のとき

$N = \frac{n-1}{2}$ とおく。$N \geq 5$ のとき $(n = 5, 7, \cdots)$

とおく。

$$C_{2N+1} = \frac{\cancel{2}(2N-3)}{(2N+1) \cdot \cancel{2}N} C_{2N-1} = \frac{(2N-3)}{N(2N+1)} \frac{(2N-5)}{(N-1)(2N-1)} C_{2N-3}$$

$$\cdots\cdots$$

$$= \frac{-1 \cdot 1}{N!\,(2N+1)(2N-1)} C_1$$

境界条件

$$\frac{dy(0)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n n (0)^{n-1} = C_1 = 0 \text{ より}$$

$$C_{2N+1}=0$$

$n=3$のとき

$$C_3=\frac{2\cdot(-1)}{3\cdot2}c_1=0$$

ゆえにnの奇数は残らない

$$\therefore\ C_0=-2,\ C_2=4,\ C_n=0\ (n\neq0,\ n\neq2)$$

ゆえに

$$y(x)=4x^2-2$$

3節で述べたエルミート多項式は

$$H_n=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

で

$$H_2=(-1)^2e^{x^2}\frac{d^2}{dx^2}(e^{-x^2})=e^{x^2}\frac{d}{dx}\{(-2x)e^{-x^2}\}$$

$$=e^{x^2}\{-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}\}=4x^2-2$$

となり$y(x)$と一致する。

一般にエルミート多項式はエルミートの微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}H_n(x)-2x\frac{d}{dx}H_n(x)+2nH_n(x)=0$$

を満たす。上の例では$n=2$を代入していたわけである。

問

$$(1-x^2)\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2x\frac{dy(x)}{dx}+2y(x)=0\qquad y(0)=0,\ \frac{dy(0)}{dx}=1$$

を解け。またこれがルジャンドルの多項式

$$P_n=\frac{(-1)^n}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$$

のP_1と一致することを確かめよ。

VII フーリエ

1 フーリエ級数とフーリエ積分変換

フーリエ級数展開は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha_n \cos\frac{n\pi x}{a} + \beta_n \sin\frac{n\pi x}{a}\right\}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx \qquad (n=1,2,\cdots)$$

であった。これに対して区間が $(0, a)$ という特別な場合を考える。
このときは sin 又 cos のどちらか一方で展開できることが知られている。
直交基底 $\left\{\sin\frac{n\pi x}{a}\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$ を正規化してみよう。
先のフーリエ級数展開のときと定義域がちがうので、内積の区間もかわることに注意する。

$$\left(\sin\frac{m\pi x}{a}, \sin\frac{n\pi x}{a}\right) = \int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = \frac{a}{2}\delta_{m,n}$$

これにより正規直交系は

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\right\}$$

となる。ゆえに

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$\beta_n = \left(f(x), \sqrt{\frac{a}{2}}\sin\frac{n\pi x}{a}\right) = \sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \qquad \text{：フーリエ sine 級数展開}$$

同様に $\left\{\cos\frac{n\pi x}{a}\right\}$ で展開すれば

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{a}}\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{n\pi x}{a}$$

$$\alpha_0=\sqrt{\frac{1}{a}},\quad \alpha_n=\sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx$$

$$f(x)=\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx$$ ：フーリエ cosine 級数展開

となる。

フーリエ級数の正規直交基底をまとめると、

区間 $(-a, a)$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2a}},\ \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{n\pi x}{a},\ \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{\frac{in\pi x}{a}}\right\}$$

区間 $(0, a)$

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\right\}$$

$$\left\{\sqrt{\frac{1}{a}},\ \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{n\pi x}{a}\right\}$$

の4種類あることになる。

今までは区間$(-a, a)$や区間$(0, a)$などの有限区間を扱ってきた。
これを無限区間$(-\infty, \infty)$に拡張したい。
今、区間$(-a, a)$で正規直交基底が

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{in\pi x}{a}}\right\}$$

のものを考える。$a \to \infty$にしたいわけである。

$$f(x) = \frac{1}{2a}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{in\pi x}{a}} \int_{-a}^{a} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{a}} dx$$

ここで

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

おく。隣り合k_nの差$k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{a}$は$a \to \infty$でいくらでも小さくなる。これを

$$dk = k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{a}$$

とかくことにしよう。これを$f(x)$に入れる。aを消すのである。

$$f(x) = \frac{1}{2\frac{\pi}{dk}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ikx} \int_{-a}^{a} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \qquad (a \to \infty)$$

：フーリエ積分展開

となる。ばらして書けば

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk$$ ：フーリエ逆積分変換

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$ ：フーリエ積分変換

となる。

フーリエ sine 級数, cosine 級数についても $a \to \infty$ とすれば

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} \hat{f}_s(k) \sin kx \, dk & \text{：フーリエ sine 逆積分変換} \\ \hat{f}_s(k) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} f(x) \sin kx \, dx & \text{：フーリエ sine 積分変換} \\ f(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \sin kx \, dk \int_0^{\infty} f(x) \sin kx \, dx & \text{：フーリエ sine 積分展開} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} \hat{f}_c(k) \cos kx \, dk & \text{：フーリエ cosine 逆積分変換} \\ \hat{f}_c(k) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} f(x) \cos kx \, dx & \text{：フーリエ cosine 積分変換} \\ f(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \cos kx \, dk \int_0^{\infty} f(x) \cos kx \, dx & \text{：フーリエ cosine 積分展開} \end{cases}$$

問1 $\exp(-|x|)$ をフーリエ積分変換せよ。 $\left(\hat{f}(k) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{1+k^2} \right)$

問2 $\exp(-x^2)$ をフーリエ積分変換せよ。 $\left(\hat{f}(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2}{4}} \right)$

2 フーリエ演算子による偏微分方程式

今,偏微分方程式

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = x \quad (0 \le x \le \pi), \quad u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = \pi$$

を解くことを考えよう。

まずフーリエ演算子なるものを導入する。ここではフーリエsine演算子

$$\hat{L} \equiv \int_0^{\pi} dx \sin nx.$$

を用いる。どの演算子を用いるのがよいかは問題によって異なる。それはあとでまとめる。

この$\hat{L}$を導入し,

$$u_n(t) = \hat{L}\, u(x,t) = \int_0^{\pi} u(x,t) \sin nx \, dx$$

なる$u_n(t)$を定義する。

フーリエsine級数展開を$u(x,t)$のxについて適用してみると$a=\pi$であることに注意して

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \int_0^{\pi} u(x,t) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$$

となる。つまり$u(x,t)$を求めるかわりに$u_n(t)$を求めればよいことがわかる。

では,与えられた偏微分方程式に$\hat{L}$を作用させてみよう。

$$\hat{\left[\right.}\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int_0^{\pi} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \sin nx\, dx$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\int_0^{\pi} \underbrace{u(x,t)}_{\text{tを含むのはここだけ}} \sin nx\, dx}_{\text{これ全体としてはtだけの関数}}$$

$$= \frac{dU_n(t)}{dt}$$

$$\hat{\left[\right.}\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \int_0^{\pi} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \sin nx\, dx$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\sin nx\right]_0^{\pi}}_{\downarrow\ 0} - n\int_0^{\pi} \frac{\partial u}{\partial x}\cos nx\, dx \qquad (\Leftarrow \text{部分積分})$$

ここで $\hat{[}$ にフーリエsine演算子をもってきた意味がある。

$$= -n\left\{\left[u(x,t)\cos nx\right]_0^{\pi} + n\int_0^{\pi} u(x,t)\sin nx\, dx\right\}$$

$$= n\pi - n^2 U_n(t)$$

ゆえに常微分方程式

$$\frac{dU_n(t)}{dt} + n^2k^2 U_n(t) = k^2 n\pi$$

が得られた。つまり偏微分方程式を常微分方程式に変換したのである。

$U_n(t)$の特解を

$$U_{n0}(t) = a$$

とおくと，これを代入して

$$n^2 \cancel{k^2} a = \cancel{k^2} n\pi$$

$$a = \frac{\pi}{n}$$

基本解は $e^{-n^2k^2t}$ となる。

ゆえに $U_n(t)$の一般解は

$$U_n(t) = Ce^{-n^2k^2t} + \frac{\pi}{n}$$

Cは境界条件から求めるのだが，$U_n(t)$の境界条件が与えられているわけではない。

これは

$$U_n(0) = \hat{\mathcal{L}}\, u(x,0) = \int_0^{\pi} u(x,0)\sin nx\,dx = \int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$

から求めるしかない。

$$U_n(0) = \int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \left[x\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{\pi}{n}$$

よって

$$C + \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$$

$$\therefore C = 0$$

これより $U_n(t) = \frac{\pi}{n}$ と決定される。

ゆえに

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}\sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

と求められる。

問 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y) = 0$ $\quad\begin{pmatrix} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le b \end{pmatrix}$, $\quad u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = g(x)$

を解け。

$$\left(u(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh ny}{\sinh nb}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx\,dx\right)$$

最後にどのような時にどの$\hat{\ }$を使うかをまとめておこう。$u(x,y)$について、

区間$(0,a)$のとき

$u(0,y)$, $u(a,y)$が与えられているとき

$$\hat{\ } = \int_0^a dx \sin\frac{n\pi x}{a}\cdot \quad \overset{\text{逆変換}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \bigcirc_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(a,y)}{\partial x}$が与えられているとき

$$\hat{\ } = \int_0^a dx \cos\frac{n\pi x}{a}\cdot \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a}\bigcirc_{n=0} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \bigcirc_n \cos\frac{n\pi x}{a}$$

区間$(-a,a)$のとき

$$\hat{\ } = \int_{-a}^a dx\, e^{-\frac{in\pi x}{a}}\cdot \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2a}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bigcirc_n e^{\frac{in\pi x}{a}}$$

区間$(0,\infty)$のとき

$u(0,y)$, $u(\infty,y)$が与えられたとき

$$\hat{\ } = \int_0^\infty dx \sin kx\cdot \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \hat{\bigcirc} \sin kx\, dk$$

$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(\infty,y)}{\partial x}$が与えられたとき

$$\hat{\ } = \int_0^\infty dx \cos kx\cdot \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \hat{\bigcirc} \cos kx\, dk$$

区間$(-\infty,\infty)$のとき

$$\hat{\ } = \int_{-\infty}^\infty dx\, e^{-ikx}\cdot \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \hat{\bigcirc}\, e^{ikx} dk$$

補足　クロネッカーのデルタとディラックのデルタ関数

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & (n=m\text{のとき}) \\ 0 & (n\neq m\text{のとき}) \end{cases}$$

はクロネッカーのデルタと呼ばれる。n, mは整数しかとれない。これを実数にまで拡張したい。$m=0$のときを考えてみよう。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n,0} = \delta_{0,0} = 1$$

である。今、nを連続的に動かしたい。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n,0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n,0} \cdot 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n,0} \{(n+1) - n\}$$

と考える。$\delta_{n,0} \to \frac{1}{a}\delta(k_n)$とし$k_n = \frac{n}{a}$とおく。$a \to \infty$で

$$k_{n+1} - k_n = \frac{1}{a} = dk_n$$

となる。よって

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n,0} \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cancel{a}} \delta(k_n) \cancel{a}\, dk_n = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k)\, dk = 1$$

となる。つまりクロネッカーのデルタを実数に拡張した関数$\delta(x)$は

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \\ \delta(x) = 0 \quad (x \neq 0) \end{cases}$$

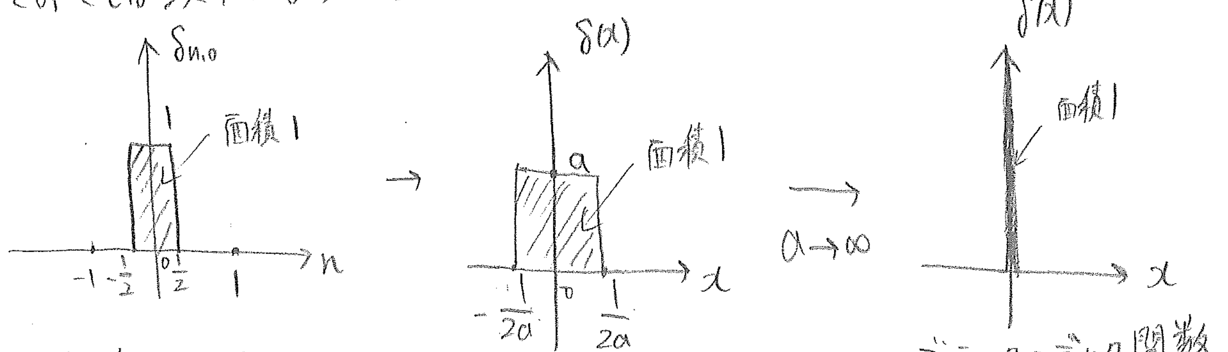
が適当であることがわかる。

$\delta(x)=0 \quad (x \neq 0)$ から

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\,dx = 1 \quad (\varepsilon : \varepsilon > 0 \text{ なる任意実数})$$

であるので $\delta(0)=\infty$ であることもわかる。

このことは以下のように考えてもよい



クロネッカーのデルタ　　ディラックのデルタ関数

ところである数列 f_n について

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n,0} f_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n,0}\{(n+1)-n\} f_n \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a}\delta(k_n) f(k_n)\, a\, dk_n = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k) f(k)\, dk$$

対応し, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n,0} f_n = f_0$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$$

と定義できよう。

ところで、ディラックのデルタ関数をフーリエ積分展開してみよう。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, dk \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, dk$$

これを逆にデルタ関数の定義にすることもできる。

問 $\delta(x)$ をフーリエ積分変換せよ。また 1 をフーリエ逆積分変換せよ。

参考文献

① 薩摩順吉：「物理の数学」(岩波基礎物理シリーズ10)
岩波書店(1995)
ISBN 4-00-007930-1

② 新田英雄：「物理と特殊関数 ―入門セミナー―」(物理数学 one point 16) 共立出版(1997)
ISBN-4-320-03316-7

③ 大槻義彦：「アッという間に解ける微分方程式」(物理数学 one point 15)
共立出版(1997)
ISBN-4-320-03315-9

④ 今村勤：「物理とフーリエ変換」(物理と数学シリーズ3)
岩波書店(1976)
ISBN-4-00-007899-2

⑤ 高木貞治：「解析概論 改訂第三版」岩波書店(1983)
ISBN-4-00-005171-7

⑥ 内田伏一，高木斉，剱持勝衛，浦川肇
「線形代数入門」裳華房(1988)
ISBN-4-7853-1053-7

⑦ 小野寺嘉孝：「物理のための応用数学」裳華房(1988)
ISBN-4-7853-2031-1

⑧ 小出昭一郎：「物理学(三訂版)」裳華房(1997)
ISBN4-7853-2074-5

私は1998年の初めごろ物理数学をよく勉強した。これ以降も良書が出るだろうから，1998年以降の良書をさがすのも良いだろう。

① 物理数学全般についてかかれた本。いちおし。わかりやすい。

② 今回，あまり特殊関数にはふれなかった。この本は特殊関数をちょっとしたストーリを交えながら，解説している。登場人物は，大学三年生真理子，大学教授大島，その弟子大学院生磯田。著者は大槻の弟子らしい。わかりやすい。

③ あの大槻のかいた本。かなりわかりやすい。難しくない微分方程式は，この本一冊でとけるようになる。一日で読める。

④ かなり難しい。フーリエをきわめたくなったら読もう。入手困難。

⑤ 伝説的名著。数学者向きの本なので，よっぽどのことがないかぎり読むことはないだろう。

⑥ これも数学者向きにかかれているが，まあまあわかりやすい。

⑦ 上級者向けだがわかりやすい。変分法，特殊関数が中心。

⑧ 物理の本であるが，巻末に数学のページがあり，この部分が非常にわかりやすい。私もこの部分はとても参考になった。物理の本としてもおすすめできる

というわけで，①をまずおさえて⑦を読むのがよい。②，③を補助的に使うのがよいだろう。

1998年11月13日