ARCH モデルのミクロ的基礎付けの試み

水田 孝信
Takanobu Mizuta

スパークス・アセット・マネジメント株式会社

経済のマクロモデルは，ミクロプロセスの積み上げによって構築する，いわいる “ミクロ的基礎付け”(micro-foundation) がなされるべきとの主張が多くなされ，ミクロ的基礎付けがなされた経済のマクロモデルが多く生まれた．一方，リスク資産の価格変動というマクロ量をモデル化したものは多く存在するが，これらのモデルをミクロ的基礎付けしようという試みは多くない．そこで本研究では人工市場研究からの知見を用いて，ARCH モデルのミクロ的基礎付け，すなわち，各係数がどのミクロプロセスから生じているのかを明らかにすることを試みた．その結果，投資家の予想価格のばらつきと需給の歪みが大きくなるとボラティリティは大きくなり，流動性を奪う投資家の存在割合が大きくなったり投資家のリスク回避度が小さくなるとボラティリティクラスタリングは大きくなることが分かった．

1. はじめに

経済のマクロモデルは，ミクロプロセスの積み上げによって構築する，いわいる “ミクロ的基礎付け”(micro-foundation) がなされるべきとの主張 *1 が多くなされ，ミクロ的基礎付けがなされた経済のマクロモデルが多く生まれた *2．一方，リスク資産の価格変動というマクロ量をモデル化したものに，ARCH モデル [Engle 82] や GARCH モデル [Bollerslev 86] など多く存在するが，これらのモデルをミクロ的基礎付けしようという試みは経済のマクロモデルに比べれば多くない．

他方で近年，取引参加者と取引所といったミクロプロセスをモデル化してコンピューター上でシミュレーションし結果として価格変動といったマクロ現象を観測する，マルチエージェントモデルの一種である人工市場モデルによるシミュレーション研究が多くなされている *3．

近年，学術界だけでなく金融規制当局や証券取引所も，金融市場の規制やルールの分析に，人工市場モデルのようなマルチエージェントシミュレーションを使うことに注目している．実際，Science 誌に掲載された Battiston らによる論文 [Battiston 16] は,「2008 年の金融危機以降，経済や金融市場を理解するために,（ネットワークモデルやマルチエージェントモデルなどを用いた）複雑系アプローチを用いることに注目が集まってきている」と述べている．実際，最近では市場の規制や制度がどうあるべきかといった議論に貢献する人工市場研究も出始めた *4．

人工市場モデルは，ミクロプロセスのみをモデル化してマクロ現象である価格変動を観測しているので，完全にミクロ的基礎付けがされたマクロモデルであるといえる．そのため，価格変動がどのミクロプロセスから生じ，どのようなメカニズムがあるのかといった知見が人工市場研究によって蓄積されてきている．

連絡先: 水田 孝信，mizutata@gmail.com

† 本稿は [Mizuta 16a] を和訳し再構成したものである．発表時のスライドはこちらで閲覧できます. http://www.slideshare.net/mizutata/mf2016

*1 代表例として [Lucas 76].

*2 例えば [加藤 07] などに詳しい.

*3 [LeBaron 06, Chen 12, 和泉 12, Cristelli 14, Mizuta 16b] などのレビューに詳しい.

*4 例えば，取引価格の最小単位 [水田 13]，取引所システムの適切な速さ [水田 15a], 空売り価格規制 [Mizuta 16c], ダークプールの普及率 [Mizuta 15b] などが人工市場シミュレーションによって議論された.

そこで本研究では人工市場研究からの知見を用いて，ARCH(1) モデル [Engle 82] のミクロ的基礎付けを試みる．すなわち，ARCH(1) モデルの各係数が，どのミクロプロセスから生じているのかを明らかにすることを試みる．

2. モデル

平均リターンが 0 の ARCH(1) モデル [Engle 82] は最終的に，

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= a_0 + a_1 r_{t-1}^2 \end{aligned} \tag{1}$$

となる．ここで，r_t は時刻 t の対数リターン，ϵ_t は標準正規分布に従う確率変数，a_0, a_1 は定数である．a_0 は固定的に存在するボラティリティ（価格変動の激しさ）の大きさを示し，a_1 はいったんボラティリティが大きくなるとある程度の期間大きいままで維持されるというボラティリティクラスタリング [Mandelbrot 63] の大きさを示している．$a_1 = 0$ の場合は，ボラティリティクラスタリングがない場合を示している．それゆえ，a_0 を決めるミクロプロセスが固定的なボラティリティの原因で，a_1 を決めるミクロプロセスがボラティリティクラスタリングの原因であるといえる．

次に，人工市場研究の知見より得られたミクロプロセスを積み上げてモデルを構築し，式 (1) と比較する．

価格変動の大きさは売買の需給差に比例するといった簡易な価格決定メカニズム（取引所のモデル）を用いた人工市場モデル *5 が多く存在し，そのような簡易なモデルであっても実際の価格変動の統計的性質を満たすことが知られている．例えば [Palmer 94] においては，$r_t = \eta(A_t^b - A_t^s)$ と定義されている．ここで，r_t，A_t^b，A_t^s はそれぞれ，時刻 $t-1$ から t までのリターン，買い注文総量，売り注文総量である．η は適当なパラメータであり，[Palmer 94] は η が実際の市場のどの要素で決まるか示していない．[水田 12] は η がどのようなミクロプロセスで決定されるかモデル化を試み，

$$r_t = \rho \frac{A_t^b - A_t^s}{A_t^b + A_t^s} \tag{2}$$

を得た *6．ここで ρ は投資家が予想している価格のばらつきを定数倍したものある．つまり投資家が予想している価格のばらつきが大きいほど価格変動が大きいことを意味する．

*5 例えば，[Arthur 91, Palmer 94, Arthur 97, Lux 99].

*6 詳細は補足で紹介する

まずはじめに，投資家として，ノイズトレーダーのみ存在する場合を考える．投資家の買い・売りの注文総量 A_t^b, A_t^s を

$$\begin{aligned} A_t^b &= \tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}kS\epsilon_t \\ A_t^s &= \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}kS\epsilon_t \end{aligned} \tag{3}$$

と仮定する．ここで，S, k は定数である．第 1 項目はノイズトレーダーが常に出している固定の注文量，第 2 項は需給の歪みによって生じる売りと買いの注文量の差である．k は固定の注文量に対して需給の歪みによって生じる注文量である．なので，k は需給の歪みによって生じる注文がどれだけ流動性を奪うかという指標であり，これが大きいほど流動性が低いと解釈できる．式 (3) を式 (2) に代入すると，

$$r_t = \rho k \epsilon_t \tag{4}$$

を得る．これを式 (1) と比較すると，

$$\sigma_t^2 = \rho^2 k^2 = a_0 \tag{5}$$

となり，$a_1 = 0$ の場合に対応する．先に述べたように，a_0 を決めるミクロプロセスが固定的なボラティリティの原因で，a_1 を決めるミクロプロセスがボラティリティクラスタリングの原因であるといえる．ノイズトレーダーは固定的なボラティリティを発生させ，ボラティリティクラスタリングを発生させない．また，ボラティリティの大きさは，投資家が予想している価格のばらつき (ρ) と需給の歪みがうばう流動性 (k) で決まる．例えば，高格付けの短期債券のように予想価格がばらけていないものよりも不確実性が高い株式の方が投資家の予想価格がばらけているのでボラティリティが高くなる．また，需給の歪みを吸収する注文が常に多く待機している高流動性の株式よりも，吸収する注文が少なく需給の歪みが激しい低流動性の株式の方がボラティリティが高くなる．

次に，ノイズトレーダー以外に，効用関数で注文数量を決めるノイズトレーダーではない投資家 (通常投資家) も存在する場合を考える．普通投資家はファンダメンタル戦略やテクニカル戦略などが該当する．普通投資家は戦略にもとづいて最適な売買と保有量を考え，ノイズトレーダーが供給している流動性を奪ってその保有量を達成する．すべての投資家の買い・売りの注文総量を

$$\begin{aligned} A_t^b &= \tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}kS(1 + lU_t)\epsilon_t \\ A_t^s &= \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}kS(1 + lU_t)\epsilon_t \end{aligned} \tag{6}$$

と仮定する．lU_t が通常投資家が加わったことによる項であり，l は通常投資家が存在する割合，つまり流動性を供給する投資家に対する流動性を奪う投資家の存在する割合，U_t は通常投資家の効用関数で決まる取引数量の係数である．また，U_t を constant absolute risk aversion(CARA) 型の効用関数を仮定する *7．すなわち，

$$U_t \propto \frac{r_t^e}{\alpha} \tag{7}$$

となる．ここで，r_t^e は通常投資家の期待リターンの大きさ，α は通常投資家のリスク回避度である．通常投資家は価格が大きく変化したときほど大きなリターンを期待すると考えられるので，ここでは r_t^e は r_{t-1}^2 の大きさに比例すると仮定する．そして，U_t を以下のように仮定する．

$$U_t = \frac{r_{t-1}^2}{\alpha} \tag{8}$$

式 (6)，式 (8) を式 (2) に代入すると，

$$r_t = \rho k\bigl(1 + \frac{l}{\alpha} r_{t-1}^2\bigr)\epsilon_t \tag{9}$$

を得る．$r_{t-1}^4 \ll 1$ と仮定し，これと式 (1) を比較すると，

$$\sigma_t^2 = \rho^2 k^2 + 2\rho^2 k^2 \frac{l}{\alpha} r_{t-1}^2 \tag{10}$$

となり，

$$\begin{aligned} a_0 &= \rho^2 k^2 \\ a_1 &= 2\rho^2 k^2 \tfrac{l}{\alpha} \end{aligned} \tag{11}$$

が得られる．a_0 はノイズトレーダーのみの場合と同じである．a_1 はボラティリティクラスタリングの大きさを示しているが，その要因は固定的なボラティリティ(a_0) と同じ ρ，k のみならず，通常投資家が存在する割合 (l) と，普通投資家のリスク回避度 (α) で決まることを示している．例えば，流動性を供給するノイズトレーダーに比べ流動性を奪う普通投資家が多くなるとボラティリティクラスタリングが大きくなる．また，普通投資家のリスク回避度が低くなると，つまりリスクをとった取引を行うほどボラティリティクラスタリングは大きくなる．ただし，普通投資家は固定的なボラティリティには影響を与えない．

3. まとめと今後の課題

本研究では人工市場研究からの知見を用いて，ARCH(1) モデル [Engle 82] のミクロ的基礎付けを試みた．すなわち，ARCH(1) モデルの各係数が，どのミクロプロセスから生じているのかを明らかにすることを試みた．

その結果，ボラティリティσ_t^2 は，

$$\sigma_t^2 = \rho^2 k^2 + 2\rho^2 k^2 \frac{l}{\alpha} r_{t-1}^2 \tag{12}$$

となることを示した．投資家の予想価格のばらつき (ρ) と需給の歪み (k) が大きくなるとボラティリティは大きくなり，流動性を奪う投資家の存在割合 (l) が大きくなったり投資家のリスク回避度 (α) が小さくなるとボラティリティクラスタリングは大きくなることが分かった．

今後の課題は 2 つある．1 つは，本研究で得られたモデルを実証分析によって検証することである．もうひとつは，本研究がもちいた仮定は強すぎるため，おのおのの仮定を慎重に検討することである．

補足

[水田 12] が導出した式 (2) の導出過程を紹介する．

買い注文をだす投資家も売り注文をだす投資家も十分多く存在するとする．時刻 t の投資家の注文価格 (対数価格)p_t の分布は，図 1 のように，買い注文，売り注文ともに，平均 p_{t-1}，標準偏差 $\acute{\rho}$ の正規分布であるとする．この注文価格のちらばりは予想している価格の散らばりに相当しているといえる．買い注文と売り注文は同じ形の分布であるが，注文総量 (面積に

*7 [Pratt 64, Arrow 65] らによって提案された．なお，CARA 型効用関数を用いて注文数量を決定している人工市場モデルとして [Izumi 96, Arthur 97, Izumi 99, Yagi 10, Chiarella 09, Gsell 09] など多数ある．そして，[水田 12] はこのモデルがボラティリティクラスタリングを再現するのに重要な役割を果たす場合があることを示した．

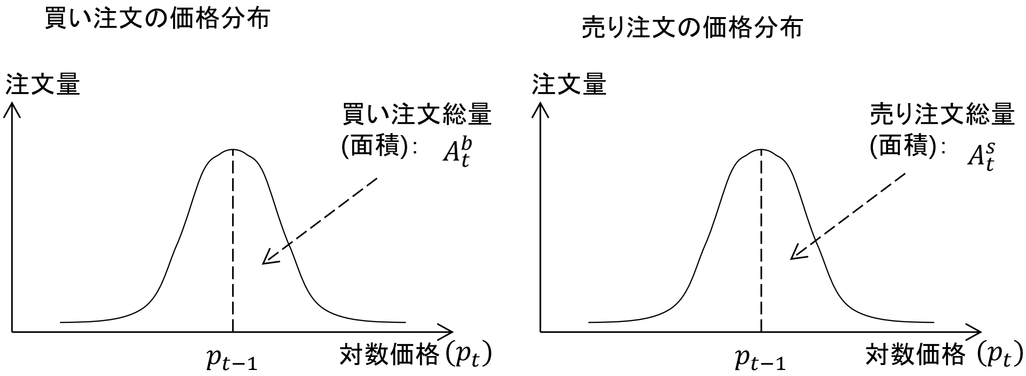

図 1: 買い注文と売り注文の価格分布.

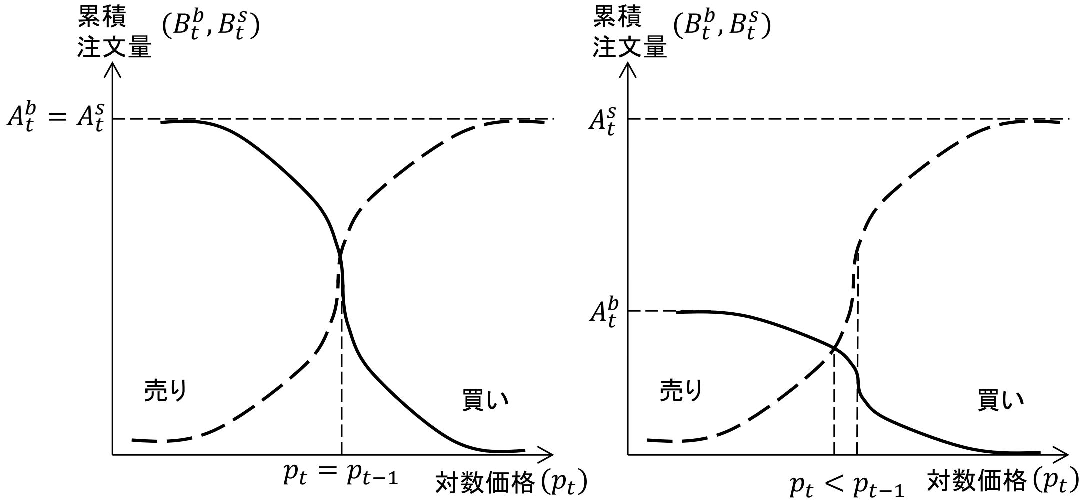

図 2: 板寄せによる取引価格の決定．横軸が価格，縦軸が累積注文量でることに注意.

相当) は異なり，買い注文の面積は買い注文・売り注文それぞれ，A_t^b，A_t^s とする．ここで板寄せ方式による価格決定を行う．板寄せ方式は需要と供給が均衡する価格で取引を行う方式である．図 2 が示すように，買い手の指値分布から需要曲線，売り手の指値分布から供給曲線を作成しそれが交わったところが取引価格となる [*8]．供給曲線 $B_t^s(p_t)$ は，ある価格 p_t 以下の価格で発注する売り手の注文数の和 (累積注文数) である．つまり，売り手の指値分布を価格の安い方から高い方へ累積した形となり，

$$B_t^s(p_t) = \frac{A_t^s}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{p_t - p_{t-1}}{\sqrt{2\acute{\rho}^2}}\right)\right] \tag{13}$$

とあらわされる．ここで，erf は誤差関数であり、

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{14}$$

と定義される．需要曲線は，ある価格以上の価格で発注する買い手の注文数の和 (累積注文数) であり，

$$B_t^b(p_t) = A_t^b - \frac{A_t^b}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{p_t - p_{t-1}}{\sqrt{2\acute{\rho}^2}}\right)\right] \tag{15}$$

となる．図 2 左に示すように $A_t^s = A_t^b$ の場合は価格 p_{t-1} で取引され，価格変動しない．しかし図 2 右が示すように，$A_t^s \neq A_t^b$ の場合は，p_{t-1} で取引されない．つまり，需給の歪みによって，予想している価格の平均値 (p_{t-1}) とは違う価格 (p_t) で取引される．ここで，$B_t^s(p_t) = B_t^b(p_t)$ より p_t を求めると，

$$p_t - p_{t-1} = r_t = \sqrt{2\acute{\rho}^2}\,\mathrm{erf}^{-1}(Z) \tag{16}$$

ここで，r_t は対数リターン，erf^{-1} は誤差関数の逆関数，

$$Z \equiv \frac{A_t^b - A_t^s}{A_t^b + A_t^s} \tag{17}$$

と定義する．Z は，

$$|Z| < 1 \tag{18}$$

を必ず満たす。$Z \ll 1$ のと仮定すると，$\mathrm{erf}^{-1}(z)$ は級数展開でき，1 次の項まで取り出すと，(2 次の項はない)，

$$r_t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\acute{\rho}Z \tag{19}$$

ここで $\rho = \sqrt{\pi/2}\acute{\rho}$ と定義し Z を元に戻すと，

$$r_t = \rho\frac{A_t^b - A_t^s}{A_t^b + A_t^s} \tag{20}$$

*8　図 2 は横軸が価格，縦軸が累積注文量であることに注意.

となり，式 (2) が得られた．

留意事項

本論文はスパークス・アセット・マネジメント株式会社の公式見解を表すものではありません．すべては個人的見解であります．

参考文献

[Arrow 65] Arrow, K. J.: *Aspects of the theory of risk-bearing*, Yrjö Jahnssonin Säätiö (1965)

[Arthur 91] Arthur, W., Durlauf, S., Lane, D., and Program, S. E.: *Money and Financial Markets*, pp. 354–368, Blackwell, Cambridge (1991)

[Arthur 97] Arthur, W., Durlauf, S., Lane, D., and Program, S. E.: *Asset pricing under endogenous expectations in an articial stock market, The economy as an evolving complex system II*, pp. 15–44, Addison-Wesley Reading, MA (1997)

[Battiston 16] Battiston, S., Farmer, J. D., Flache, A., Garlaschelli, D., Haldane, A. G., Heesterbeek, H., Hommes, C., Jaeger, C., May, R., and Scheffer, M.: Complexity theory and financial regulation, *Science*, Vol. 351, No. 6275, pp. 818–819 (2016)

[Bollerslev 86] Bollerslev, T.: Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of econometrics*, Vol. 31, No. 3, pp. 307–327 (1986)

[Chen 12] Chen, S.-H., Chang, C.-L., and Du, Y.-R.: Agent-based economic models and econometrics, *Knowledge Engineering Review*, Vol. 27, No. 2, pp. 187–219 (2012)

[Chiarella 09] Chiarella, C., Iori, G., and Perelló, J.: The impact of heterogeneous trading rules on the limit order book and order flows, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 33, No. 3, pp. 525–537 (2009)

[Cristelli 14] Cristelli, M.: *Complexity in Financial Markets, Modeling Psychological Behavior in Agent-Based Models and Order Book Models*, Springer (2014)

[Engle 82] Engle, R. F.: Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, pp. 987–1007 (1982)

[Gsell 09] Gsell, M.: Assessing the impact of algorithmic trading on markets: a simulation approach (2009)

[Izumi 96] Izumi, K. and Okatsu, T.: An artificial market analysis of exchange rate dynamics, *Evolutionary Programming V*, pp. 27–36 (1996)

[Izumi 99] Izumi, K. and Ueda, K.: Analysis of dealers' processing financial news based on an artificial market approach, *Journal of Computational Intelligence in Finance*, Vol. 7, pp. 23–33 (1999)

[和泉 12] 和泉 潔：第 3 章 金融市場 – 人工市場の観点から, 杉原 正顯（編）, 計算と社会 (岩波講座 計算科学 第 6 巻), 岩波書店 (2012)

[加藤 07] 加藤涼：現代マクロ経済学講義: 動学的一般均衡モデル入門, 東洋経済新報社 (2007)

[LeBaron 06] LeBaron, B.: Agent-based computational finance, *Handbook of computational economics*, Vol. 2, pp. 1187–1233 (2006)

[Lucas 76] Lucas, R. E.: Econometric policy evaluation: A critique, in *Carnegie-Rochester conference series on public policy*, Vol. 1, pp. 19–46, Elsevier (1976)

[Lux 99] Lux, T. and Marchesi, M.: Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market, *Nature*, Vol. 397, No. February, pp. 498–500 (1999)

[Mandelbrot 63] Mandelbrot, B.: The variation of certain speculative prices, *The journal of business*, Vol. 36, No. 4, pp. 394–419 (1963)

[水田 12] 水田 孝信, 八木 勲, 和泉 潔：現実の価格決定メカニズムを考慮した人工市場の設定評価手法の開発, 人工知能学会論文誌, Vol. 27, No. 6, pp. 320–327 (2012), http://doi.org/10.1527/tjsai.27.320

[水田 13] 水田 孝信, 早川 聡, 和泉 潔, 吉村 忍：人工市場シミュレーションを用いた取引市場間におけるティックサイズと取引量の関係性分析, JPX ワーキング・ペーパー, No. 2, 日本取引所グループ (2013), http://www.jpx.co.jp/corporate/research-study/working-paper/

[水田 15a] 水田 孝信, 則武 誉人, 早川 聡, 和泉 潔：人工市場シミュレーションを用いた取引システムの高速化が価格形成に与える影響の分析, JPX ワーキング・ペーパー, No. 9, 日本取引所グループ (2015), http://www.jpx.co.jp/corporate/research-study/working-paper/

[Mizuta 15b] Mizuta, T., Kosugi, S., Kusumoto, T., Matsumoto, W., and Izumi, K.: Effects of dark pools on financial markets' efficiency and price discovery function: an investigation by multi-agent simulations, *Evolutionary and Institutional Economics Review*, Vol. 12, No. 2, pp. 375–394 (2015), http://dx.doi.org/10.1007/s40844-015-0020-3

[Mizuta 16a] Mizuta, T.: Micro-Foundation of ARCH Model, *SSRN Working Paper Series* (2016), http://ssrn.com/abstract=2710457

[Mizuta 16b] Mizuta, T.: A Review of Recent Artificial Market Simulation Studies for Financial Market Regulations And/Or Rules, *SSRN Working Paper Series* (2016), http://ssrn.com/abstract=2710495

[Mizuta 16c] Mizuta, T., Kosugi, S., Kusumoto, T., Matsumoto, W., Izumi, K., Yagi, I., and Yoshimura, S.: Effects of Price Regulations and Dark Pools on Financial Market Stability: An Investigation by Multiagent Simulations, *Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, Vol. 23, No. 1-2, pp. 97–120 (2016), http://dx.doi.org/10.1002/isaf.1374

[Palmer 94] Palmer, R., Brian Arthur, W., Holland, J., LeBaron, B., and Tayler, P.: Artificial economic life: a simple model of a stockmarket, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 75, No. 1-3, pp. 264–274 (1994)

[Pratt 64] Pratt, J. W.: Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, Vol. 32, No. 1/2, pp. 122–136 (1964)

[Yagi 10] Yagi, I., Mizuta, T., and Izumi, K.: A Study on the Effectiveness of Short-selling Regulation using Artificial Markets, *Evolutionary and Institutional Economics Review*, Vol. 7, No. 1, pp. 113–132 (2010), http://link.springer.com/article/10.14441/eier.7.113